

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

## 1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie; von A. Einstein.*

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie“ und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül“, welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

### A. Prinzipielle Erwägungen zum Postulat der Relativität.

#### § 1. Bemerkungen zu der speziellen Relativitätstheorie.

Der speziellen Relativitätstheorie liegt folgendes Postulat zugrunde, welchem auch durch die Galilei-Newtonsche Mechanik Genüge geleistet wird: Wird ein Koordinatensystem  $K$  so gewählt, daß in bezug auf dasselbe die physikalischen Gesetze in ihrer einfachsten Form gelten, so gelten *dieselben* Gesetze auch in bezug auf jedes andere Koordinatensystem  $K'$ , das relativ zu  $K$  in gleichförmiger Translationsbewegung begriffen ist. Dieses Postulat nennen wir „spezielles Relativitätsprinzip“. Durch das Wort „speziell“ soll angedeutet werden, daß das Prinzip auf den Fall beschränkt ist, daß  $K'$  eine *gleichförmige Translationsbewegung* gegen  $K$  ausführt, daß sich aber die Gleichwertigkeit von  $K'$  und  $K$  nicht auf den Fall *ungleichförmiger* Bewegung von  $K'$  gegen  $K$  erstreckt.

Die spezielle Relativitätstheorie weicht also von der klassischen Mechanik nicht durch das Relativitätspostulat ab, sondern allein durch das Postulat von der Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, aus welchem im Verein mit dem speziellen Relativitätsprinzip die Relativität der Gleichzeitigkeit sowie die Lorentztransformation und die mit dieser verknüpften Gesetze über das Verhalten bewegter starrer Körper und Uhren in bekannter Weise folgen.

Die Modifikation, welche die Theorie von Raum und Zeit durch die spezielle Relativitätstheorie erfahren hat, ist zwar eine tiefgehende; aber *ein* wichtiger Punkt blieb unangetastet. Auch gemäß der speziellen Relativitätstheorie sind nämlich die Sätze der Geometrie unmittelbar als die Gesetze über die möglichen relativen Lagen (ruhender) fester Körper zu deuten, allgemeiner die Sätze der Kinematik als Sätze, welche das Verhalten von Meßkörpern und Uhren beschreiben. Zwei hervorgehobenen materiellen Punkten eines ruhenden (starrten) Körpers entspricht hierbei stets eine Strecke von ganz bestimmter Länge, unabhängig von Ort und Orientierung des Körpers sowie von der Zeit; zwei hervorgehobenen Zeigerstellungen einer relativ zum (berechtigten) Bezugssystem ruhenden Uhr entspricht stets eine Zeitstrecke von bestimmter Länge, unabhängig von Ort und Zeit. Es wird sich bald zeigen, daß die allgemeine Relativitätstheorie an dieser einfachen physikalischen Deutung von Raum und Zeit nicht festhalten kann.

## § 2. Über die Gründe, welche eine Erweiterung des Relativitätspostulates nahelegen.

Der klassischen Mechanik und nicht minder der speziellen Relativitätstheorie haftet ein erkenntnistheoretischer Mangel an, der vielleicht zum ersten Male von E. Mach klar hervor gehoben wurde. Wir erläutern ihn am folgenden Beispiel. Zwei flüssige Körper von gleicher Größe und Art schweben frei im Raume in so großer Entfernung voneinander (und von allen übrigen Massen), daß nur diejenigen Gravitationskräfte berücksichtigt werden müssen, welche die Teile *eines* dieser Körper aufeinander ausüben. Die Entfernung der Körper voneinander sei unveränderlich. Relative Bewegungen der Teile eines der Körper gegeneinander sollen nicht auftreten. Aber jede Masse soll — von einem relativ zu der anderen Masse ruhenden Beobachter aus beurteilt — um die Verbindungslinie der Massen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren (es ist dies eine konstaterbare Relativbewegung beider Massen). Nun denken wir uns die Oberflächen beider Körper ( $S_1$  und  $S_2$ ) mit Hilfe (relativ ruhender) Maßstäbe ausgemessen; es ergebe sich, daß die Oberfläche von  $S_1$  eine Kugel, die von  $S_2$  ein Rotationsellipsoid sei.

Wir fragen nun: Aus welchem Grunde verhalten sich die Körper  $S_1$  und  $S_2$  verschieden? Eine Antwort auf diese Frage kann nur dann als erkenntnistheoretisch befriedigend<sup>1)</sup> anerkannt werden, wenn die als Grund angegebene Sache eine *beobachtbare Erfahrungstatsache* ist; denn das Kausalitätsgesetz hat nur dann den Sinn einer Aussage über die Erfahrungswelt, wenn als Ursachen und Wirkungen letzten Endes nur *beobachtbare Tatsachen* auftreten.

Die Newtonsche Mechanik gibt auf diese Frage keine befriedigende Antwort. Sie sagt nämlich folgendes. Die Gesetze der Mechanik gelten wohl für einen Raum  $R_1$ , gegen welchen der Körper  $S_1$  in Ruhe ist, nicht aber gegenüber einem Raume  $R_2$ , gegen welchen  $S_2$  in Ruhe ist. Der berechnete Galileische Raum  $R_1$ , der hierbei eingeführt wird, ist aber eine *bloß fingierte* Ursache, keine beobachtbare Sache. Es ist also klar, daß die Newtonsche Mechanik der Forderung

1) Eine derartige erkenntnistheoretisch befriedigende Antwort kann natürlich immer noch *physikalisch* unzutreffend sein, falls sie mit anderen Erfahrungen im Widerspruch ist.

der Kausalität in dem betrachteten Falle nicht wirklich, sondern nur scheinbar Genüge leistet, indem sie die bloß fingierte Ursache  $R_1$  für das beobachtbare verschiedene Verhalten der Körper  $S_1$  und  $S_2$  verantwortlich macht.

Eine befriedigende Antwort auf die oben aufgeworfene Frage kann nur so lauten: Das aus  $S_1$  und  $S_2$  bestehende physikalische System zeigt für sich allein keine denkbare Ursache, auf welche das verschiedene Verhalten von  $S_1$  und  $S_2$  zurückgeführt werden könnte. Die Ursache muß also *außerhalb* dieses Systems liegen. Man gelangt zu der Auffassung, daß die allgemeinen Bewegungsgesetze, welche im speziellen die Gestalten von  $S_1$  und  $S_2$  bestimmen, derart sein müssen, daß das mechanische Verhalten von  $S_1$  und  $S_2$  ganz wesentlich durch ferne Massen mitbedingt werden muß, welche wir nicht zu dem betrachteten System gerechnet hatten. Diese fernen Massen (und ihre Relativbewegungen gegen die betrachteten Körper) sind dann als Träger prinzipiell beobachtbarer Ursachen für das verschiedene Verhalten unserer betrachteten Körper anzusehen; sie übernehmen die Rolle der fingierten Ursache  $R_1$ . Von allen denkbaren, relativ zueinander beliebig bewegten Räumen  $R_1$ ,  $R_2$  usw. darf a priori keiner als bevorzugt angesehen werden, wenn nicht der dargelegte erkenntnistheoretische Einwand wieder aufleben soll. *Die Gesetze der Physik müssen so beschaffen sein, daß sie in bezug auf beliebig bewegte Bezugssysteme gelten.* Wir gelangen also auf diesem Wege zu einer Erweiterung des Relativitätspostulates.

Außer diesem schwerwiegenden erkenntnistheoretischen Argument spricht aber auch eine wohlbekannte physikalische Tatsache für eine Erweiterung der Relativitätstheorie. Es sei  $K$  ein Galileisches Bezugssystem, d. h. ein solches, relativ zu welchem (mindestens in dem betrachteten vierdimensionalen Gebiete) eine von anderen hinlänglich entfernte Masse sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Es sei  $K'$  ein zweites Koordinatensystem, welches relativ zu  $K$  in *gleichförmig beschleunigter* Translationsbewegung sei. Relativ zu  $K'$  führte dann eine von anderen hinreichend getrennte Masse eine beschleunigte Bewegung aus, derart, daß deren Beschleunigung und Beschleunigungsrichtung von ihrer stofflichen Zusammensetzung und ihrem physikalischen Zustande unabhängig ist.

Kann ein relativ zu  $K'$  ruhender Beobachter hieraus



den Schluß ziehen, daß er sich auf einem „wirklich“ beschleunigten Bezugssystem befindet? Diese Frage ist zu verneinen; denn das vorhin genannte Verhalten frei beweglicher Massen relativ zu  $K'$  kann ebensogut auf folgende Weise gedeutet werden. Das Bezugssystem  $K'$  ist unbeschleunigt; in dem betrachteten zeiträumlichen Gebiete herrscht aber ein Gravitationsfeld, welches die beschleunigte Bewegung der Körper relativ zu  $K'$  erzeugt.

Diese Auffassung wird dadurch ermöglicht, daß uns die Erfahrung die Existenz eines Kraftfeldes (nämlich des Gravitationsfeldes) gelehrt hat, welches die merkwürdige Eigenschaft hat, allen Körpern dieselbe Beschleunigung zu erteilen.<sup>1)</sup> Das mechanische Verhalten der Körper relativ zu  $K'$  ist dasselbe, wie es gegenüber Systemen sich der Erfahrung darbietet, die wir als „ruhende“ bzw. als „berechtigte“ Systeme anzusehen gewohnt sind; deshalb liegt es auch vom physikalischen Standpunkt nahe, anzunehmen, daß die Systeme  $K$  und  $K'$  beide mit demselben Recht als „ruhend“ angesehen werden können, bzw. daß sie als Bezugssysteme für die physikalische Beschreibung der Vorgänge gleichberechtigt seien.

Aus diesen Erwägungen sieht man, daß die Durchführung der allgemeinen Relativitätstheorie zugleich zu einer Theorie der Gravitation führen muß; denn man kann ein Gravitationsfeld durch bloße Änderung des Koordinatensystems „erzeugen“. Ebenso sieht man unmittelbar, daß das Prinzip von der Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit eine Modifikation erfahren muß. Denn man erkennt leicht, daß die Bahn eines Lichtstrahles in bezug auf  $K'$  im allgemeinen eine krumme sein muß, wenn sich das Licht in bezug auf  $K$  geradlinig und mit bestimmter, konstanter Geschwindigkeit fortpflanzt.

### § 3. Das Raum-Zeit-Kontinuum. Forderung der allgemeinen Kovarianz für die die allgemeinen Naturgesetze ausdrückenden Gleichungen.

In der klassischen Mechanik sowie in der speziellen Relativitätstheorie haben die Koordinaten des Raumes und der Zeit eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Ein Punkt-ereignis hat die  $X_1$ -Koordinate  $x_1$ , bedeutet: Die nach den

1) Daß das Gravitationsfeld diese Eigenschaft mit großer Genauigkeit besitzt, hat Eötvös experimentell bewiesen.

Regeln der Euklidischen Geometrie mittels starrer Stäbe ermittelte Projektion des Punktereignisses auf die  $X_1$ -Achse wird erhalten, indem man einen bestimmten Stab, den Einheitsmaßstab,  $x_1$ mal vom Anfangspunkt des Koordinatenkörpers auf der (positiven)  $X_1$ -Achse abträgt. Ein Punkt hat die  $X_4$ -Koordinate  $x_4 = t$ , bedeutet: Eine relativ zum Koordinatensystem ruhend angeordnete, mit dem Punkte ereignis räumlich (praktisch) zusammenfallende Einheitsuhr, welche nach bestimmten Vorschriften gerichtet ist, hat  $x_4 = t$  Perioden zurückgelegt beim Eintreten des Punktereignisses.<sup>1)</sup>

Diese Auffassung von Raum und Zeit schwebte den Physikern stets, wenn auch meist unbewußt, vor, wie aus der Rolle klar erkennbar ist, welche diese Begriffe in der messenden Physik spielen; diese Auffassung mußte der Leser auch der zweiten Betrachtung des letzten Paragraphen zugrunde legen, um mit diesen Ausführungen einen Sinn verbinden zu können. Aber wir wollen nun zeigen, daß man sie fallen lassen und durch eine allgemeinere ersetzen muß, um das Postulat der allgemeinen Relativität durchführen zu können, falls die spezielle Relativitätstheorie für den Grenzfall des Fehlens eines Gravitationsfeldes zutrifft.

Wir führen in einem Raume, der frei sei von Gravitationsfeldern, ein Galileisches Bezugssystem  $K(x, y, z, t)$  ein, und außerdem ein relativ zu  $K$  gleichförmig rotierendes Koordinatensystem  $K'(x', y', z', t')$ . Die Anfangspunkte beider Systeme sowie deren  $Z$ -Achsen mögen dauernd zusammenfallen. Wir wollen zeigen, daß für eine Raum—Zeitmessung im System  $K'$  die obige Festsetzung für die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten nicht aufrecht erhalten werden kann. Aus Symmetriegründen ist klar, daß ein Kreis um den Anfangspunkt in der  $X$ - $Y$ -Ebene von  $K$  zugleich als Kreis in der  $X'$ - $Y'$ -Ebene von  $K'$  aufgefaßt werden kann. Wir denken uns nun Umfang und Durchmesser dieses Kreises mit einem (relativ zum Radius unendlich kleinen) Einheitsmaßstabe ausgemessen und den Quotienten beider Meßresultate gebildet. Würde man dieses Experiment mit einem relativ zum Galileischen System

1) Die Konstatierbarkeit der „Gleichzeitigkeit“ für räumlich unmittelbar benachbarte Ereignisse, oder — präziser gesagt — für das raumzeitliche unmittelbare Benachbartsein (Koinzidenz) nehmen wir an, ohne für diesen fundamentalen Begriff eine Definition zu geben.

$K$  ruhenden Maßstäbe ausführen, so würde man als Quotienten die Zahl  $\pi$  erhalten. Das Resultat der mit einem relativ zu  $K'$  ruhenden Maßstabe ausgeführten Bestimmung würde eine Zahl sein, die größer ist als  $\pi$ . Man erkennt dies leicht, wenn man den ganzen Meßprozeß vom „ruhenden“ System  $K$  aus beurteilt und berücksichtigt, daß der peripherisch angelegte Maßstab eine Lorentzverkürzung erleidet, der radial angelegte Maßstab aber nicht. Es gilt daher in bezug auf  $K'$  nicht die Euklidische Geometrie; der oben festgelegte Koordinatenbegriff, welcher die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie voraussetzt, versagt also mit Bezug auf das System  $K'$ . Ebenso wenig kann man in  $K'$  eine den physikalischen Bedürfnissen entsprechende Zeit einführen, welche durch relativ zu  $K'$  ruhende, gleich beschaffene Uhren angezeigt wird. Um dies einzusehen, denke man sich im Koordinatenursprung und an der Peripherie des Kreises je eine von zwei gleich beschaffenen Uhren angeordnet und vom „ruhenden“ System  $K$  aus betrachtet. Nach einem bekannten Resultat der speziellen Relativitätstheorie geht — von  $K$  aus beurteilt — die auf der Kreisperipherie angeordnete Uhr langsamer als die im Anfangspunkt angeordnete Uhr, weil erstere Uhr bewegt ist, letztere aber nicht. Ein im gemeinsamen Koordinatenursprung befindlicher Beobachter, welcher auch die an der Peripherie befindliche Uhr mittels des Lichtes zu beobachten fähig wäre, würde also die an der Peripherie angeordnete Uhr langsamer gehen sehen als die neben ihm angeordnete Uhr. Da er sich nicht dazu entschließen wird, die Lichtgeschwindigkeit auf dem in Betracht kommenden Wege explizite von der Zeit abhängen zu lassen, wird er seine Beobachtung dahin interpretieren, daß die Uhr an der Peripherie „wirklich“ langsamer gehe als die im Ursprung angeordnete. Er wird also nicht umhin können, die Zeit so zu definieren, daß die Ganggeschwindigkeit einer Uhr vom Orte abhängt.

Wir gelangen also zu dem Ergebnis: In der allgemeinen Relativitätstheorie können Raum- und Zeitgrößen nicht so definiert werden, daß räumliche Koordinatendifferenzen unmittelbar mit dem Einheitsmaßstab, zeitliche mit einer Normaluhr gemessen werden könnten.

Das bisherige Mittel, in das zeiträumliche Kontinuum in bestimmter Weise Koordinaten zu legen, versagt also, und

es scheint sich auch kein *anderer* Weg darzubieten, der gestattet würde, der vierdimensionalen Welt Koordinatensysteme so anzupassen, daß bei ihrer Verwendung eine besonders einfache Formulierung der Naturgesetze zu erwarten wäre. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als alle denkbaren<sup>1)</sup> Koordinatensysteme als für die Naturbeschreibung prinzipiell gleichberechtigt anzusehen. Dies kommt auf die Forderung hinaus:

*Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszu-  
drücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d. h. die  
beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein ko-  
variant) sind.*

Es ist klar, daß eine Physik, welche diesem Postulat genügt, dem allgemeinen Relativitätspostulat gerecht wird. Denn in *allen* Substitutionen sind jedenfalls auch diejenigen enthalten, welche allen Relativbewegungen der (dreidimensionalen) Koordinatensysteme entsprechen. Daß diese Forderung der allgemeinen Kovarianz, welche dem Raum und der Zeit den letzten Rest physikalischer Gegenständlichkeit nehmen, eine natürliche Forderung ist, geht aus folgender Überlegung hervor. Alle unsere zeiträumlichen Konstatierungen laufen stets auf die Bestimmung zeiträumlicher Koinzidenzen hinaus. Bestände beispielsweise das Geschehen nur in der Bewegung materieller Punkte, so wäre letzten Endes nichts beobachtbar als die Begegnungen zweier oder mehrerer dieser Punkte. Auch die Ergebnisse unserer Messungen sind nichts anderes als die Konstatierung derartiger Begegnungen materieller Punkte unserer Maßstäbe mit anderen materiellen Punkten bzw. Koinzidenzen zwischen Uhrzeigern, Zifferblattpunkten und ins Auge gefaßten, am gleichen Orte und zur gleichen Zeit stattfindenden Punkt ereignissen.

Die Einführung eines Bezugssystems dient zu nichts anderem als zur leichteren Beschreibung der Gesamtheit solcher Koinzidenzen. Man ordnet der Welt vier zeiträumliche Variable  $x_1, x_2, x_3, x_4$  zu, derart, daß jedem Punkt ereignis ein Wertesystem der Variablen  $x_1, \dots, x_4$  entspricht. Zwei koinzidierenden Punkt ereignissen entspricht dasselbe

1) Von gewissen Beschränkungen, welche der Forderung der eindeutigen Zuordnung und derjenigen der Stetigkeit entsprechen, wollen wir hier nicht sprechen.

Wertesystem der Variablen  $x_1 \dots x_4$ ; d. h. die Koinzidenz ist durch die Übereinstimmung der Koordinaten charakterisiert. Führt man statt der Variablen  $x_1 \dots x_4$  beliebige Funktionen derselben,  $x_1', x_2', x_3', x_4'$  als neues Koordinatensystem ein, so daß die Wertesysteme einander eindeutig zugeordnet sind, so ist die Gleichheit aller vier Koordinaten auch im neuen System der Ausdruck für die raumzeitliche Koinzidenz zweier Punktereignisse. Da sich alle unsere physikalischen Erfahrungen letzten Endes auf solche Koinzidenzen zurückführen lassen, ist zunächst kein Grund vorhanden, gewisse Koordinatensysteme vor anderen zu bevorzugen, d. h. wir gelangen zu der Forderung der allgemeinen Kovarianz.

§ 4. Beziehung der vier Koordinaten zu räumlichen und zeitlichen Meßergebnissen.

Analytischer Ausdruck für das Gravitationsfeld.

Es kommt mir in dieser Abhandlung nicht darauf an, die allgemeine Relativitätstheorie als ein möglichst einfaches logisches System mit einem Minimum von Axiomen darzustellen. Sondern es ist mein Hauptziel, diese Theorie so zu entwickeln, daß der Leser die psychologische Natürlichkeit des eingeschlagenen Weges empfindet und daß die zugrunde gelegten Voraussetzungen durch die Erfahrung möglichst gesichert erscheinen. In diesem Sinne sei nun die Voraussetzung eingeführt:

Für unendlich kleine vierdimensionale Gebiete ist die Relativitätstheorie im engeren Sinne bei passender Koordinatenwahl zutreffend.

Der Beschleunigungszustand des unendlich kleinen („örtlichen“) Koordinatensystems ist hierbei so zu wählen, daß ein Gravitationsfeld nicht auftritt; dies ist für ein unendlich kleines Gebiet möglich.  $X_1, X_2, X_3$  seien die räumlichen Koordinaten;  $X_4$  die zugehörige, in geeignetem Maßstabe gemessene<sup>1)</sup> Zeitkoordinate. Diese Koordinaten haben, wenn ein starres Stäbchen als Einheitsmaßstab gegeben gedacht wird, bei gegebener Orientierung des Koordinatensystems eine unmittelbare physikalische Bedeutung im Sinne der speziellen Relativitätstheorie. Der Ausdruck

$$(1) \quad ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

1) Die Zeiteinheit ist so zu wählen, daß die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit — in dem „lokalen“ Koordinatensystem gemessen — gleich 1 wird.

hat dann nach der speziellen Relativitätstheorie einen von der Orientierung des lokalen Koordinatensystems unabhängigen, durch Raum—Zeitmessung ermittelbaren Wert. Wir nennen  $ds$  die Größe des zu den unendlich benachbarten Punkten des vierdimensionalen Raumes gehörigen Linienelementes. Ist das zu dem Element  $(dX_1 \dots dX_4)$  gehörige  $ds^2$  positiv, so nennen wir mit Minkowski ersteres zeitartig, im entgegengesetzten Falle raumartig.

Zu dem betrachteten „Linienelement“ bzw. zu den beiden unendlich benachbarten Punkteereignissen gehören auch bestimmte Differentiale  $dx_1 \dots dx_4$  der vierdimensionalen Koordinaten des gewählten Bezugssystems. Ist dieses sowie ein „lokales“ System obiger Art für die betrachtete Stelle gegeben, so werden sich hier die  $dX_\sigma$  durch bestimmte lineare homogene Ausdrücke der  $dx_\sigma$  darstellen lassen:

$$(2) \quad dX_\sigma = \sum_{\sigma'} a_{\sigma\sigma'} dx_{\sigma'}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so erhält man

$$(3) \quad ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau,$$

wobei die  $g_{\sigma\tau}$  Funktionen der  $x_\sigma$  sein werden, die nicht mehr von der Orientierung und dem Bewegungszustand des „lokalen“ Koordinatensystems abhängen können; denn  $ds^2$  ist eine durch Maßstab-Uhrenmessung ermittelbare, zu den betrachteten, zeiträumlich unendlich benachbarten Punkteereignissen gehörige, unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl definierte Größe. Die  $g_{\sigma\tau}$  sind hierbei so zu wählen, daß  $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$  ist; die Summation ist über alle Werte von  $\sigma$  und  $\tau$  zu erstrecken, so daß die Summe aus  $4 \times 4$  Summanden besteht, von denen 12 paarweise gleich sind.

Der Fall der gewöhnlichen Relativitätstheorie geht aus dem hier Betrachteten hervor, falls es, vermöge des besonderen Verhaltens der  $g_{\sigma\tau}$  in einem endlichen Gebiete, möglich ist, in diesem das Bezugssystem so zu wählen, daß die  $g_{\sigma\tau}$  die konstanten Werte

$$(4) \quad \begin{cases} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{cases}$$

annehmen. Wir werden später sehen, daß die Wahl solcher Koordinaten für endliche Gebiete im allgemeinen nicht möglich ist.

Aus den Betrachtungen der §§ 2 und 3 geht hervor, daß die Größen  $g_{\sigma\tau}$  vom physikalischen Standpunkte aus als diejenigen Größen anzusehen sind, welche das Gravitationsfeld in bezug auf das gewählte Bezugssystem beschreiben. Nehmen wir nämlich zunächst an, es sei für ein gewisses betrachtetes vierdimensionales Gebiet bei geeigneter Wahl der Koordinaten die spezielle Relativitätstheorie gültig. Die  $g_{\sigma\tau}$  haben dann die in (4) angegebenen Werte. Ein freier materieller Punkt bewegt sich dann bezüglich dieses Systems geradlinig gleichförmig. Führt man nun durch eine beliebige Substitution neue Raum—Zeitkoordinaten  $x_1 \dots x_4$  ein, so werden in diesem neuen System die  $g_{\mu\nu}$  nicht mehr Konstante, sondern Raum—Zeitfunktionen sein. Gleichzeitig wird sich die Bewegung des freien Massenpunktes in den neuen Koordinaten als eine krummlinige, nicht gleichförmige, darstellen, wobei das Bewegungsgesetz unabhängig sein wird von der Natur des bewegten Massenpunktes. Wir werden also diese Bewegung als eine solche unter dem Einfluß eines Gravitationsfeldes deuten. Wir sehen das Auftreten eines Gravitationsfeldes geknüpft an eine raumzeitliche Veränderlichkeit der  $g_{\sigma\tau}$ . Auch in dem allgemeinen Falle, daß wir nicht in einem endlichen Gebiete bei passender Koordinatenwahl die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie herbeiführen können, werden wir an der Auffassung festzuhalten haben, daß die  $g_{\sigma\tau}$  das Gravitationsfeld beschreiben.

Die Gravitation spielt also gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie eine Ausnahmerolle gegenüber den übrigen, insbesondere den elektromagnetischen Kräften, indem die das Gravitationsfeld darstellenden 10 Funktionen  $g_{\sigma\tau}$  zugleich die metrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Maßraumes bestimmen.

#### B. Mathematische Hilfsmittel für die Aufstellung allgemeiner kovarianter Gleichungen.

Nachdem wir im vorigen gesehen haben, daß das allgemeine Relativitätspostulat zu der Forderung führt, daß die Gleichungssysteme der Physik beliebigen Substitutionen der Koordinaten  $x_1 \dots x_4$  gegenüber kovariant sein müssen,



haben wir zu überlegen, wie derartige allgemein kovariante Gleichungen gewonnen werden können. Dieser rein mathematischen Aufgabe wenden wir uns jetzt zu; es wird sich dabei zeigen, daß bei deren Lösung die in Gleichung (3) angegebene Invariante  $ds$  eine fundamentale Rolle spielt, welche wir in Anlehnung an die Gauss'sche Flächentheorie als „Linien-element“ bezeichnet haben.

Der Grundgedanke dieser allgemeinen Kovariantentheorie ist folgender. Es seien gewisse Dinge („Tensoren“) mit Bezug auf jedes Koordinatensystem definiert durch eine Anzahl Raumfunktionen, welche die „Komponenten“ des Tensors genannt werden. Es gibt dann gewisse Regeln, nach welchen diese Komponenten für ein neues Koordinatensystem berechnet werden, wenn sie für das ursprüngliche System bekannt sind, und wenn die beide Systeme verknüpfende Transformation bekannt ist. Die nachher als Tensoren bezeichneten Dinge sind ferner dadurch gekennzeichnet, daß die Transformationsgleichungen für ihre Komponenten linear und homogen sind. Demnach verschwinden sämtliche Komponenten im neuen System, wenn sie im ursprünglichen System sämtlich verschwinden. Wird also ein Naturgesetz durch das Nullsetzen aller Komponenten eines Tensors formuliert, so ist es allgemein kovariant; indem wir die Bildungsgesetze der Tensoren untersuchen, erlangen wir die Mittel zur Aufstellung allgemein kovarianter Gesetze.

#### § 5. Kontravarianter und kovarianter Vierervektor.

*Kontravarianter Vierervektor.* Das Linienelement ist definiert durch die vier „Komponenten“  $dx_\alpha$ , deren Transformationsgesetz durch die Gleichung

$$(5) \quad dx'_\alpha = \sum_{\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta$$

ausgedrückt wird. Die  $dx'_\alpha$  drücken sich linear und homogen durch die  $dx_\beta$  aus; wir können diese Koordinatendifferentiale  $dx_\beta$  daher als die Komponenten eines „Tensors“ ansehen, den wir speziell als kontravarianten Vierervektor bezeichnen. Jedes Ding, was bezüglich des Koordinatensystems durch vier Größen  $A^\alpha$  definiert ist, die sich nach demselben Gesetz

$$(5a) \quad A'^\alpha = \sum_{\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} A^\beta$$

transformieren, bezeichnen wir ebenfalls als kontravarianten Vierervektor. Aus (5a) folgt sogleich, daß die Summen  $(A^\sigma \pm B^\sigma)$  ebenfalls Komponenten eines Vierervektors sind, wenn  $A^\sigma$  und  $B^\sigma$  es sind. Entsprechendes gilt für alle später als „Tensoren“ einzuführenden Systeme (Regel von der Addition und Subtraktion der Tensoren).

**Kovarianter Vierervektor.** Vier Größen  $A_\nu$  nennen wir die Komponenten eines kovarianten Vierervektors, wenn für jede beliebige Wahl des kontravarianten Vierervektors  $B^\nu$

$$(6) \quad \sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{Invariante.}$$

Aus dieser Definition folgt das Transformationsgesetz des kovarianten Vierervektors. Ersetzt man nämlich auf der rechten Seite der Gleichung

$$\sum_\sigma A_\sigma B^\sigma = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

$B^\nu$  durch den aus der Umkehrung der Gleichung (5a) folgenden Ausdruck

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\sigma} B^{\sigma'},$$

so erhält man

$$\sum_\sigma B^{\sigma'} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma'} A_{\sigma'}.$$

Hieraus folgt aber, weil in dieser Gleichung die  $B^{\sigma'}$  unabhängig voneinander frei wählbar sind, das Transformationsgesetz

$$(7) \quad A_{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_{\sigma'}} A_\nu.$$

**Bemerkung zur Vereinfachung der Schreibweise der Ausdrücke.**

Ein Blick auf die Gleichungen dieses Paragraphen zeigt, daß über Indizes, die zweimal unter einem Summenzeichen auftreten [z. B. der Index  $\nu$  in (5)], stets summiert wird, und zwar *nur* über zweimal auftretende Indizes. Es ist deshalb möglich, ohne die Klarheit zu beeinträchtigen, die Summenzeichen wegzulassen. Dafür führen wir die Vorschrift ein: Tritt ein Index in einem Term eines Ausdruckes zweimal auf, so ist über ihn stets zu summieren, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.

Der Unterschied zwischen dem kovarianten und kontravarianten Vierervektor liegt in dem Transformationsgesetz

[(7) bzw. (5)]. Beide Gebilde sind Tensoren im Sinne der obigen allgemeinen Bemerkung; hierin liegt ihre Bedeutung. Im Anschluß an Ricci und Levi-Civita wird der kontravariante Charakter durch oberen, der kovariante durch unteren Index bezeichnet.

### § 6. Tensoren zweiten und höheren Ranges.

*Kontravarianter Tensor.* Bilden wir sämtliche 16 Produkte  $A^{\mu\nu}$  der Komponenten  $A^\mu$  und  $B^\nu$  zweier kontravarianten Vierervektoren

$$(8) \quad A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu,$$

so erfüllt  $A^{\mu\nu}$  gemäß (8) und (5a) das Transformationsgesetz

$$(9) \quad A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}.$$

Wir nennen ein Ding, das bezüglich eines jeden Bezugssystems durch 16 Größen (Funktionen) beschrieben wird, die das Transformationsgesetz (9) erfüllen, einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges. Nicht jeder solcher Tensor läßt sich gemäß (8) aus zwei Vierervektoren bilden. Aber es ist leicht zu beweisen, daß sich 16 beliebig gegebene  $A^{\mu\nu}$  darstellen lassen als die Summe der  $A^\mu B^\nu$  von vier geeignet gewählten Paaren von Vierervektoren. Deshalb kann man beinahe alle Sätze, die für den durch (9) definierten Tensor zweiten Ranges gelten, am einfachsten dadurch beweisen, daß man sie für spezielle Tensoren vom Typus (8) dartut.

*Kontravarianter Tensor beliebigen Ranges.* Es ist klar, daß man entsprechend (8) und (9) auch kontravariante Tensoren dritten und höheren Ranges definieren kann mit  $4^3$  usw. Komponenten. Ebenso erhellt aus (8) und (9), daß man in diesem Sinne den kontravarianten Vierervektor als kontravarianten Tensor ersten Ranges auffassen kann.

*Kovarianter Tensor.* Bildet man andererseits die 16 Produkte  $A_{\mu\nu}$  der Komponenten zweier kovarianten Vierervektoren  $A_\mu$  und  $B_\nu$ ,

$$(10) \quad A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu,$$

so gilt für diese das Transformationsgesetz

$$(11) \quad A_{\sigma\tau'} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_\nu} A_{\mu\nu}.$$

Durch dieses Transformationsgesetz wird der kovariante Tensor zweiten Ranges definiert. Alle Bemerkungen, welche vorher über die kontravarianten Tensoren gemacht wurden, gelten auch für die kovarianten Tensoren.

*Bemerkung.* Es ist bequem, den Skalar (Invariante) sowohl als kontravarianten wie als kovarianten Tensor vom Range Null zu behandeln.

*Gemischter Tensor.* Man kann auch einen Tensor zweiten Ranges vom Typus

$$(12) \quad A_{\mu}{}^{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}$$

definieren, der bezüglich des Index  $\mu$  kovariant, bezüglich des Index  $\nu$  kontravariant ist. Sein Transformationsgesetz ist

$$(13) \quad A_{\sigma}{}^{\tau'} = \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}} A_{\alpha}^{\beta}.$$

Natürlich gibt es gemischte Tensoren mit beliebig vielen Indizes kovarianten und beliebig vielen Indizes kontravarianten Charakters. Der kovariante und der kontravariante Tensor können als spezielle Fälle des gemischten angesehen werden.

*Symmetrische Tensoren.* Ein kontravarianter bzw. kovarianter Tensor zweiten oder höheren Ranges heißt *symmetrisch*, wenn zwei Komponenten, die durch Vertauschung irgend zweier Indizes auseinander hervorgehen, gleich sind. Der Tensor  $A^{\mu\nu}$  bzw.  $A_{\mu\nu}$  ist also symmetrisch, wenn für jede Kombination der Indizes

$$(14) \quad A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu},$$

bzw.

$$(14a) \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$$

ist.

Es muß bewiesen werden, daß die so definierte Symmetrie eine vom Bezugssystem unabhängige Eigenschaft ist. (Aus (9) folgt in der Tat mit Rücksicht auf (14))

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x_{\sigma'}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\sigma'}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_{\nu}} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x_{\tau'}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x_{\sigma'}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma'}.$$

Die vorletzte Gleichsetzung beruht auf der Vertauschung der Summationsindizes  $\mu$  und  $\nu$  (d. h. auf bloßer Änderung der Bezeichnungsweise).

*Antisymmetrische Tensoren.* Ein kontravarianter bzw. kovarianter Tensor zweiten, dritten oder vierten Ranges heißt

antisymmetrisch, wenn zwei Komponenten, die durch Vertauschung irgend zweier Indizes auseinander hervorgehen, *entgegengesetzt gleich* sind. Der Tensor  $A^{\mu\nu}$  bzw.  $A_{\mu\nu}$  ist also antisymmetrisch, wenn stets

$$(15) \quad A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu},$$

bzw.

$$(15a) \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$$

ist.

Von den 16 Komponenten  $A^{\mu\nu}$  verschwinden die vier Komponenten  $A^{\mu\mu}$ ; die übrigen sind paarweise entgegengesetzt gleich, so daß nur 6 numerisch verschiedene Komponenten vorhanden sind (Sechservektor). Ebenso sieht man, daß der antisymmetrische Tensor  $A^{\mu\nu\sigma}$  (dritten Ranges) nur vier numerisch verschiedene Komponenten hat, der antisymmetrische Tensor  $A^{\mu\nu\sigma\tau}$  nur eine einzige. Symmetrische Tensoren höheren als vierten Ranges gibt es in einem Kontinuum von vier Dimensionen nicht.

#### § 7. Multiplikation der Tensoren.

*Äußere Multiplikation der Tensoren.* Man erhält aus den Komponenten eines Tensors vom Range  $z$  und eines solchen vom Range  $z'$  die Komponenten eines Tensors vom Range  $z + z'$ , indem man alle Komponenten des ersten mit allen Komponenten des zweiten paarweise multipliziert. So entstehen beispielsweise die Tensoren  $T$  aus den Tensoren  $A$  und  $B$  verschiedener Art

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_{\sigma},$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta},$$

$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}.$$

Der Beweis des Tensorcharakters der  $T$  ergibt sich unmittelbar aus den Darstellungen (8), (10), (12) oder aus den Transformationsregeln (9), (11), (13). Die Gleichungen (8), (10), (12) sind selbst Beispiele äußerer Multiplikation (von Tensoren ersten Ranges).

„*Verjüngung*“ eines gemischten Tensors. Aus jedem gemischten Tensor kann ein Tensor von einem um zwei kleineren Range gebildet werden, indem man einen Index kovarianten und einen Index kontravarianten Charakters gleichsetzt und

nach diesem Index summiert („Verjüngung“). Man gewinnt so z. B. aus dem gemischten Tensor vierten Ranges  $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$  den gemischten Tensor zweiten Ranges

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \left( = \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \right)$$

und aus diesem, abermals durch Verjüngung, den Tensor nullten Ranges  $A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ .

Der Beweis dafür, daß das Ergebnis der Verjüngung wirklich Tensorcharakter besitzt, ergibt sich entweder aus der Tensorarstellung gemäß der Verallgemeinerung von (12) in Verbindung mit (6) oder aus der Verallgemeinerung von (13).

*Innere und gemischte Multiplikation der Tensoren.* Diese bestehen in der Kombination der äußeren Multiplikation mit der Verjüngung.

Beispiele. — Aus dem kovarianten Tensor zweiten Ranges  $A_{\mu\nu}$  und dem kontravarianten Tensor ersten Ranges  $B^{\sigma}$  bilden wir durch äußere Multiplikation den gemischten Tensor

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}.$$

Durch Verjüngung nach den Indizes  $\nu, \sigma$  entsteht der kovariante Vierervektor

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Diesen bezeichnen wir auch als inneres Produkt der Tensoren  $A_{\mu\nu}$  und  $B^{\sigma}$ . Analog bildet man aus den Tensoren  $A_{\mu\nu}$  und  $B^{\sigma\tau}$  durch äußere Multiplikation und zweimalige Verjüngung das innere Produkt  $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ . Durch äußere Produktbildung und einmalige Verjüngung erhält man aus  $A_{\mu\nu}$  und  $B^{\sigma\tau}$  den gemischten Tensor zweiten Ranges  $D^{\tau}_{\mu} = A_{\mu\nu} B^{\mu\tau}$ . Man kann diese Operation passend als eine gemischte bezeichnen; denn sie ist eine äußere bezüglich der Indizes  $\mu$  und  $\tau$ , eine innere bezüglich der Indizes  $\nu$  und  $\sigma$ .

Wir beweisen nun einen Satz, der zum Nachweis des Tensorcharakters oft verwendbar ist. Nach dem soeben Dargelegten ist  $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$  ein Skalar, wenn  $A_{\mu\nu}$  und  $B^{\sigma\tau}$  Tensoren sind. Wir behaupten aber auch folgendes. Wenn  $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$  für jede Wahl des Tensors  $B^{\mu\nu}$  eine Invariante ist, so hat  $A_{\mu\nu}$  Tensorcharakter.

Beweis. — Es ist nach Voraussetzung für eine beliebige Substitution

$$A_{\sigma\tau}' B^{\sigma\tau'} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Nach der Umkehrung von (9) ist aber

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_{\sigma'}} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_{\tau'}} B^{\sigma\tau}.$$

Dies, eingesetzt in obige Gleichung, liefert:

$$\left( A_{\sigma\tau}' - \frac{\partial x_\mu}{\partial x_{\sigma'}} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_{\tau'}} A_{\mu\nu} \right) B^{\sigma\tau} = 0.$$

Dies kann bei beliebiger Wahl von  $B^{\sigma\tau}$  nur dann erfüllt sein, wenn die Klammer verschwindet, woraus mit Rücksicht auf (11) die Behauptung folgt.

Dieser Satz gilt entsprechend für Tensoren beliebigen Ranges und Charakters; der Beweis ist stets analog zu führen.

Der Satz läßt sich ebenso beweisen in der Form: Sind  $B^\mu$  und  $C^\nu$  beliebige Vektoren, und ist bei jeder Wahl derselben das innere Produkt

$$A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu$$

ein Skalar, so ist  $A_{\mu\nu}$  ein kovarianter Tensor. Dieser letztere Satz gilt auch dann noch, wenn nur die speziellere Aussage zutrifft, daß bei beliebiger Wahl des Vierervektors  $B^\mu$  das skalare Produkt

$$A_{\mu\nu} B^\mu B^\nu$$

ein Skalar ist, falls man außerdem weiß, daß  $A_{\mu\nu}$  der Symmetriebedingung  $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$  genügt. Denn auf dem vorhin angegebenen Wege beweist man den Tensorcharakter von  $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ , woraus dann wegen der Symmetrieeigenschaft der Tensorcharakter von  $A_{\mu\nu}$  selbst folgt. Auch dieser Satz läßt sich leicht verallgemeinern auf den Fall kovarianter und kontravarianter Tensoren beliebigen Ranges.

Endlich folgt aus dem Bewiesenen der ebenfalls auf beliebige Tensoren zu verallgemeinernde Satz: Wenn die Größen  $A_{\mu\nu} B^\nu$  bei beliebiger Wahl des Vierervektors  $B^\nu$  einen Tensor ersten Ranges bilden, so ist  $A_{\mu\nu}$  ein Tensor zweiten Ranges. Ist nämlich  $C^\mu$  ein beliebiger Vierervektor, so ist wegen des Tensorcharakters  $A_{\mu\nu} B^\nu$  das innere Produkt  $A_{\mu\nu} C^\mu B^\nu$  bei beliebiger Wahl der beiden Vierervektoren  $C^\mu$  und  $B^\nu$  ein Skalar, woraus die Behauptung folgt.

### § 8. Einiges über den Fundamentaltensor der $g_{\mu\nu}$ .

Der kovariante Fundamentaltensor. In dem invarianten Ausdruck des Quadrates des Linienelementes

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$



spielt  $dx_\mu$  die Rolle eines beliebig wählbaren kontravarianten Vektors. Da ferner  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , so folgt nach den Betrachtungen des letzten Paragraphen hieraus, daß  $g_{\mu\nu}$  ein kovarianter Tensor zweiten Ranges ist. Wir nennen ihn „Fundamentaltensor“. Im folgenden leiten wir einige Eigenschaften dieses Tensors ab, die zwar jedem Tensor zweiten Ranges eigen sind; aber die besondere Rolle des Fundamentaltensors in unserer Theorie, welche in der Besonderheit der Gravitationswirkungen ihren physikalischen Grund hat, bringt es mit sich, daß die zu entwickelnden Relationen nur bei dem Fundamentaltensor für uns von Bedeutung sind.

*Der kontravariante Fundamentaltensor.* Bildet man in dem Determinantenschema der  $g_{\mu\nu}$  zu jedem  $g_{\mu\nu}$  die Unterdeterminante und dividiert diese durch die Determinante  $g = |g_{\mu\nu}|$  der  $g_{\mu\nu}$ , so erhält man gewisse Größen  $g^{\mu\nu}$  ( $= \overset{*}{g}^{\mu\nu}$ ), von denen wir beweisen wollen, daß sie einen kontravarianten Tensor bilden.

Nach einem bekannten Determinantensatze ist

$$(16) \quad g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu,$$

wobei das Zeichen  $\delta_\mu^\nu$  1 oder 0 bedeutet, je nachdem  $\mu = \nu$  oder  $\mu \neq \nu$  ist. Statt des obigen Ausdruckes für  $ds^2$  können wir auch

$$g_{\mu\sigma} \delta_\nu^\sigma dx_\mu dx_\nu,$$

oder nach (16) auch

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_\mu dx_\nu$$

schreiben. Nun bilden aber nach den Multiplikationsregeln des vorigen Paragraphen die Größen

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma} dx_\mu$$

einen kovarianten Vierervektor, und zwar (wegen der willkürlichen Wählbarkeit der  $dx_\mu$ ) einen beliebig wählbaren Vierervektor. Indem wir ihn in unseren Ausdruck einführen, erhalten wir

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Da dies bei beliebiger Wahl des Vektors  $d\xi_\sigma$  ein Skalar ist und  $g^{\sigma\tau}$  nach seiner Definition in den Indizes  $\sigma$  und  $\tau$  symmetrisch ist, folgt aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen, daß  $g^{\sigma\tau}$  ein kontravarianter Tensor ist. Aus (16) folgt noch, daß auch  $\delta_\mu^\nu$  ein Tensor ist, den wir den gemischten Fundamentaltensor nennen können.

*Determinante des Fundamentaltensors.* Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten ist

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}| |g^{\alpha\nu}|.$$

Andererseits ist

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |\delta_{\mu}^{\nu}| = 1.$$

Also folgt

$$(17) \quad |g_{\mu\nu}| |g^{\mu\nu}| = 1.$$

*Invariante des Volumens.* Wir suchen zuerst das Transformationsgesetz der Determinante  $g = |g_{\mu\nu}|$ . Gemäß (11) ist

$$g' = \left| \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} g_{\mu\nu} \right|.$$

Hieraus folgt durch zweimalige Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinanten

$$g' = \left| \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \right| \left| \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \right|^2 g,$$

oder

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \right| \sqrt{g}.$$

Andererseits ist das Gesetz der Transformation des Volumenelementes

$$d\tau' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

nach dem bekannten Jakobischen Satze

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \right| d\tau.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$(18) \quad \sqrt{g'} d\tau' = \sqrt{g} d\tau.$$

Statt  $\sqrt{g}$  wird im folgenden die Größe  $\sqrt{-g}$  eingeführt, welche wegen des hyperbolischen Charakters des zeiträumlichen Kontinuums stets einen reellen Wert hat. Die Invariante  $\sqrt{-g} d\tau$  ist gleich der Größe des im „örtlichen Bezugssystem“ mit starren Maßstäben und Uhren im Sinne der speziellen Relativitätstheorie gemessenen vierdimensionalen Volumenelementes.

*Bemerkung über den Charakter des raumzeitlichen Kontinuums.* Unsere Voraussetzung, daß im unendlich Kleinen stets die spezielle Relativitätstheorie gelte, bringt es mit sich,

daß sich  $ds^2$  immer gemäß (1) durch die reellen Größen  $dX_1 \dots dX_4$  ausdrücken läßt. Nennen wir  $d\tau_0$  das „natürliche“ Volumelement  $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$ , so ist also

$$(18a) \quad d\tau_0 = \sqrt{-g} d\tau.$$

Soll an einer Stelle des vierdimensionalen Kontinuums  $\sqrt{-g}$  verschwinden, so bedeutet dies, daß hier einem endlichen Koordinatenvolumen ein unendlich kleines „natürliches“ Volumen entspreche. Dies möge nirgends der Fall sein. Dann kann  $g$  sein Vorzeichen nicht ändern; wir werden im Sinne der speziellen Relativitätstheorie annehmen, daß  $g$  stets einen endlichen negativen Wert habe. Es ist dies eine Hypothese über die physikalische Natur des betrachteten Kontinuums und gleichzeitig eine Festsetzung über die Koordinatenwahl.

Ist aber  $-g$  stets positiv und endlich, so liegt es nahe, die Koordinatenwahl a posteriori so zu treffen, daß diese Größe gleich 1 wird. Wir werden später sehen, daß durch eine solche Beschränkung der Koordinatenwahl eine bedeutende Vereinfachung der Naturgesetze erzielt werden kann. An Stelle von (18) tritt dann einfach

$$d\tau' = d\tau,$$

woraus mit Rücksicht auf Jakobis Satz folgt

$$(19) \quad \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1.$$

Bei dieser Koordinatenwahl sind also nur Substitutionen der Koordinaten von der Determinante 1 zulässig.

Es wäre aber irrtümlich, zu glauben, daß dieser Schritt einen partiellen Verzicht auf das allgemeine Relativitätspostulat bedeute. Wir fragen nicht: „Wie heißen die Naturgesetze, welche gegenüber allen Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind?“ Sondern wir fragen: „Wie heißen die allgemein kovarianten Naturgesetze?“ Erst nachdem wir diese aufgestellt haben, vereinfachen wir ihren Ausdruck durch eine besondere Wahl des Bezugssystems.

*Bildung neuer Tensoren vermittelt des Fundamentaltensors.* Durch innere, äußere und gemischte Multiplikation eines Tensors mit dem Fundamentaltensor entstehen Tensoren anderen Charakters und Ranges.

Beispiele:

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Besonders sei auf folgende Bildungen hingewiesen:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(„Ergänzung“ des kovarianten bzw. kontravarianten Tensors) und

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Wir nennen  $B_{\mu\nu}$  den zu  $A_{\mu\nu}$  gehörigen reduzierten Tensor. Analog

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Es sei bemerkt, daß  $g^{\mu\nu}$  nichts anderes ist als die Ergänzung von  $g_{\mu\nu}$ . Denn man hat

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}.$$

#### § 9. Gleichung der geodätischen Linie (bzw. der Punkt-bewegung).

Da das „Linienelement“  $ds$  eine unabhängig vom Koordinatensystem definierte Größe ist, hat auch die zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  des vierdimensionalen Kontinuums gezogene Linie, für welche  $\int ds$  ein Extremum ist (geodätische Linie), eine von der Koordinatenwahl unabhängige Bedeutung. Ihre Gleichung ist

$$(20) \quad \delta \left\{ \int_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man in bekannter Weise durch Ausführung der Variation vier totale Differentialgleichungen, welche diese geodätische Linie bestimmen; diese Ableitung soll der Vollständigkeit halber hier Platz finden. Es sei  $\lambda$  eine Funktion der Koordinaten  $x_\nu$ ; diese definiert eine Schar von Flächen, welche die gesuchte geodätische Linie sowie alle ihr unendlich benachbarten, durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gezogenen Linien schneiden. Jede solche Kurve kann dann dadurch gegeben gedacht werden, daß ihre Koordinaten  $x_\nu$  in Funktion von  $\lambda$  ausgedrückt werden. Das Zeichen  $\delta$  entspricht dem Übergang von einem Punkte der gesuchten geodätischen

Linie zu demjenigen Punkte einer benachbarten Kurve, welcher zu dem nämlichen  $\lambda$  gehört. Dann läßt sich (20) durch

$$(20a) \quad \begin{cases} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \, d\lambda = 0 \\ w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \end{cases}$$

ersetzen. Da aber

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left( \frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\},$$

so erhält man nach Einsetzen von  $\delta w$  in (20a) mit Rücksicht darauf, daß

$$\delta \left( \frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d \delta x_\nu}{d\lambda},$$

nach partieller Integration

$$(20b) \quad \begin{cases} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda x_\sigma \delta x_\sigma = 0 \\ x_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{cases}$$

Hieraus folgt wegen der freien Wählbarkeit der  $\delta x_\sigma$  das Verschwinden der  $x_\sigma$ . Also sind

$$(20c) \quad x_\sigma = 0$$

die Gleichungen der geodätischen Linie. Ist auf der betrachteten geodätischen Linie nicht  $ds = 0$ , so können wir als Parameter  $\lambda$  die auf der geodätischen Linie gemessene „Bogenlänge“  $s$  wählen. Dann wird  $w = 1$ , und man erhält an Stelle von (20c)

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} = 0,$$

oder durch bloße Änderung der Bezeichnungsweise

$$(20d) \quad g_{\alpha\sigma} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \left[ \begin{matrix} \mu \nu \\ \sigma \end{matrix} \right] \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

wobei nach Christoffel gesetzt ist

$$(21) \quad \left[ \begin{matrix} \mu \nu \\ \sigma \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right).$$

Multipliziert man endlich (20d) mit  $g^{\sigma\tau}$  (äußere Multiplikation bezüglich  $\tau$ , innere bezüglich  $\sigma$ ), so erhält man schließlich als endgültige Form der Gleichung der geodätischen Linie

$$(22) \quad \frac{d^2 x_r}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0.$$

Hierbei ist nach Christoffel gesetzt

$$(23) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ r \end{matrix} \right\} = g^{ra} \left[ \begin{matrix} \mu \nu \\ a \end{matrix} \right].$$

### § 10. Die Bildung von Tensoren durch Differentiation.

Gestützt auf die Gleichung der geodätischen Linie können wir nun leicht die Gesetze ableiten, nach welchen durch Differentiation aus Tensoren neue Tensoren gebildet werden können. Dadurch werden wir erst in den Stand gesetzt, allgemein kovariante Differentialgleichungen aufzustellen. Wir erreichen dies Ziel durch wiederholte Anwendung des folgenden einfachen Satzes.

Ist in unserem Kontinuum eine Kurve gegeben, deren Punkte durch die Bogendistanz  $s$  von einem Fixpunkt auf der Kurve charakterisiert sind, ist ferner  $\varphi$  eine invariante Raumfunktion, so ist auch  $d\varphi/ds$  eine Invariante. Der Beweis liegt darin, daß sowohl  $d\varphi$  als auch  $ds$  Invarianten sind.

Da

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds},$$

so ist auch

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds}$$

eine Invariante, und zwar für alle Kurven, die von einem Punkte des Kontinuums ausgehen, d. h. für beliebige Wahl des Vektors der  $dx_\mu$ . Daraus folgt unmittelbar, daß

$$(24) \quad A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

ein kovarianter Vierervektor ist (Gradient von  $\varphi$ ).

Nach unserem Satze ist ebenso der auf einer Kurve genommene Differentialquotient

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}$$

eine Invariante. Durch Einsetzen von  $\psi$  erhalten wir zunächst

$$\chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Hieraus läßt sich zunächst die Existenz eines Tensors nicht ableiten. Setzen wir nun aber fest, daß die Kurve,

auf welcher wir differenziert haben, eine geodätische Kurve sei, so erhalten wir nach (22) durch Ersetzen von  $d^2 x_\nu / ds^2$ :

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Aus der Vertauschbarkeit der Differentiationen nach  $\mu$  und  $\nu$  und daraus, daß gemäß (23) und (21) die Klammer  $\left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\}$  bezüglich  $\mu$  und  $\nu$  symmetrisch ist, folgt, daß der Klammerausdruck in  $\mu$  und  $\nu$  symmetrisch ist. Da man von einem Punkt des Kontinuums aus in beliebiger Richtung eine geodätische Linie ziehen kann,  $dx_\mu/ds$  also ein Vierervektor mit frei wählbarem Verhältnis der Komponenten ist, folgt nach den Ergebnissen des § 7, daß

$$(25) \quad A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

ein kovarianter Tensor zweiten Ranges ist. Wir haben also das Ergebnis gewonnen: Aus dem kovarianten Tensor ersten Ranges

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

können wir durch Differentiation einen kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$(26) \quad A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau$$

bilden. Wir nennen den Tensor  $A_{\mu\nu}$  die „Erweiterung“ des Tensors  $A_\mu$ . Zunächst können wir leicht zeigen, daß diese Bildung auch dann auf einen Tensor führt, wenn der Vektor  $A_\mu$  nicht als ein Gradient darstellbar ist. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

ein kovarianter Vierervektor ist, wenn  $\psi$  und  $\varphi$  Skalare sind. Dies ist auch der Fall für eine aus vier solchen Gliedern bestehende Summe

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \dots + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

falls  $\psi^{(1)} \varphi^{(1)} \dots \psi^{(4)} \varphi^{(4)}$  Skalare sind. Nun ist aber klar, daß sich jeder kovariante Vierervektor in der Form  $S_\mu$  darstellen läßt. Ist nämlich  $A_\mu$  ein Vierervektor, dessen Komponenten



beliebig gegebene Funktionen der  $x_\nu$  sind, so hat man nur (bezüglich des gewählten Koordinatensystems) zu setzen

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= A_1, & \varphi^{(1)} &= x_1, \\ \psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2, \\ \psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3, \\ \psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4,\end{aligned}$$

um zu erreichen, daß  $S_\mu$  gleich  $A_\mu$  wird.

Um daher zu beweisen, daß  $A_{\mu\nu}$  ein Tensor ist, wenn auf der rechten Seite für  $A_\mu$  ein beliebiger kovarianter Vierervektor eingesetzt wird, brauchen wir nur zu zeigen, daß dies für den Vierervektor  $S_\mu$  zutrifft. Für letzteres ist es aber, wie ein Blick auf die rechte Seite von (26) lehrt, hinreichend, den Nachweis für den Fall

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

zu führen. Es hat nun die mit  $\psi$  multiplizierte rechte Seite von (25)

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

Tensorcharakter. Ebenso ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

ein Tensor (äußeres Produkt zweier Vierervektoren). Durch Addition folgt der Tensorcharakter von

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right).$$

Damit ist, wie ein Blick auf (26) lehrt, der verlangte Nachweis für den Vierervektor

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

und daher nach dem vorhin Bewiesenen für jeden beliebigen Vierervektor  $A_\mu$  geführt. —

Mit Hilfe der Erweiterung des Vierervektors kann man leicht die „Erweiterung“ eines kovarianten Tensors beliebigen Ranges definieren; diese Bildung ist eine Verallgemeinerung der Erweiterung des Vierervektors. Wir beschränken uns auf die Aufstellung der Erweiterung des Tensors zweiten Ranges, da dieser das Bildungsgesetz bereits klar übersehen läßt.

Wie bereits bemerkt, läßt sich jeder kovariante Tensor zweiten Ranges darstellen<sup>1)</sup> als eine Summe von Tensoren vom Typus  $A_\mu B_\nu$ . Es wird deshalb genügen, den Ausdruck der Erweiterung für einen solchen speziellen Tensor abzuleiten. Nach (26) haben die Ausdrücke

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} B_\tau$$

Tensorcharakter. Durch äußere Multiplikation des ersten mit  $B_\nu$  des zweiten mit  $A_\mu$  erhält man je einen Tensor dritten Ranges; deren Addition ergibt den Tensor dritten Ranges

$$(27) \quad A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\mu\tau},$$

wobei  $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$  gesetzt ist. Da die rechte Seite von (27) linear und homogen ist bezüglich der  $A_{\mu\nu}$  und deren ersten Ableitungen, führt dieses Bildungsgesetz nicht nur bei einem Tensor vom Typus  $A_\mu B_\nu$ , sondern auch bei einer Summe solcher Tensoren, d. h. bei einem beliebigen kovarianten Tensor zweiten Ranges, zu einem Tensor. Wir nennen  $A_{\mu\nu\sigma}$  die Erweiterung des Tensors  $A_{\mu\nu}$ .

Es ist klar, daß (26) und (24) nur spezielle Fälle von (27) sind (Erweiterung des Tensors ersten bzw. nullten Ranges). Überhaupt lassen sich alle speziellen Bildungsgesetze von Tensoren auf (27) in Verbindung mit Tensormultiplikationen auffassen.

# § 11. Einige Spezialfälle von besonderer Bedeutung.

*Einige den Fundamentaltensor betreffende Hilfssätze.* Wir leiten zunächst einige im folgenden viel gebrauchte Hilfs-

1) Durch äußere Multiplikation der Vektoren mit den (beliebig gegebenen) Komponenten  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$  bzw. 1, 0, 0, 0 entsteht ein Tensor mit den Komponenten

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Durch Addition von vier Tensoren von diesem Typus erhält man den Tensor  $A_{\mu\nu}$  mit beliebig vorgeschriebenen Komponenten.

gleichungen ab. Nach der Regel von der Differentiation der Determinanten ist

$$(28) \quad dg = g^{\mu\nu} g d g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g d g^{\mu\nu}.$$

Die letzte Form rechtfertigt sich durch die vorletzte, wenn man bedenkt, daß  $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_{\mu}^{\mu'}$ , daß also  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ , folglich

$$g_{\mu\nu} d g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} d g_{\mu\nu} = 0.$$

Aus (28) folgt

$$(29) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Aus

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

folgt ferner durch Differentiation

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bzw.} \\ g_{\mu\sigma} d g^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} d g_{\mu\sigma} \\ g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda} \end{array} \right.$$

Durch gemischte Multiplikation mit  $g^{\sigma\tau}$  bzw.  $g_{\nu\lambda}$  erhält man hieraus (bei geänderter Bezeichnungsweise der Indizes)

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} d g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} d g_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{array} \right.$$

bzw.

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} d g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} d g^{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{array} \right.$$

Die Beziehung (31) erlaubt eine Umformung, von der wir ebenfalls öfter Gebrauch zu machen haben. Gemäß (21) ist

$$(33) \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \left[ \begin{array}{c} \alpha \ \sigma \\ \beta \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \beta \ \sigma \\ \alpha \end{array} \right].$$

Setzt man dies in die zweite der Formeln (31) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (23)

$$(34) \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left( g^{\mu\tau} \left\{ \begin{array}{c} \tau \ \sigma \\ \nu \end{array} \right\} + g^{\nu\tau} \left\{ \begin{array}{c} \tau \ \sigma \\ \mu \end{array} \right\} \right)$$

Durch Substitution der rechten Seite von (34) in (29) ergibt sich

$$(29a) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \ \sigma \\ \mu \end{array} \right\}.$$

*Divergenz des kontravarianten Vierervektors.* Multipliziert man (26) mit dem kontravarianten Fundamentaltensor  $g^{\mu\nu}$  (innere Multiplikation), so nimmt die rechte Seite nach Umformung des ersten Gliedes zunächst die Form an

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (g^{\mu\nu} A_\mu) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha} \left( \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) g^{\mu\nu} A_\tau.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes kann gemäß (31) und (29) in die Form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu} A_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu} A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} g^{\mu\nu} A_\tau.$$

gebracht werden. Da es auf die Benennung der Summationsindizes nicht ankommt, heben sich die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes gegen das zweite des obigen weg; das letzte läßt sich mit dem ersten des obigen Ausdruckes vereinigen. Setzt man noch

$$g^{\mu\nu} A_\mu = A^\nu,$$

wobei  $A^\nu$  ebenso wie  $A_\mu$  ein frei wählbarer Vektor ist, so erhält man endlich

$$(35) \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} A^\nu).$$

Dieser Skalar ist die *Divergenz* des kontravarianten Vierervektors  $A^\nu$ .

„*Rotation*“ des (kovarianten) Vierervektors. Das zweite Glied in (26) ist in den Indizes  $\mu$  und  $\nu$  symmetrisch. Es ist deshalb  $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$  ein besonders einfach gebauter (antisymmetrischer) Tensor. Man erhält

$$(36) \quad B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}.$$

*Antisymmetrische Erweiterung eines Sechservektors.* Wendet man (27) auf einen antisymmetrischen Tensor zweiten Ranges  $A_{\mu\nu}$  an, bildet hierzu die beiden durch zyklische Vertauschung der Indizes  $\mu, \nu, \sigma$  entstehenden Gleichungen und addiert diese drei Gleichungen, so erhält man den Tensor dritten Ranges

$$(37) \quad B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu},$$

von welchem leicht zu beweisen ist, daß er antisymmetrisch ist.

*Divergenz des Sechservektors.* Multipliziert man (27) mit  $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$  (gemischte Multiplikation), so erhält man ebenfalls

einen Tensor. Das erste Glied der rechten Seite von (27) kann man in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta} \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu}$$

schreiben. Ersetzt man  $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$  durch  $A_\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$  durch  $A^{\alpha\beta}$  und ersetzt man in dem umgeformten ersten Gliede

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

vermittelt (34), so entsteht aus der rechten Seite von (27) ein siebengliedriger Ausdruck, von dem sich vier Glieder wegheben. Es bleibt übrig

$$(38) \quad A_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\sigma^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma & \kappa \\ \alpha & \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta} + \left\{ \begin{matrix} \sigma & \kappa \\ \beta & \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa}.$$

Es ist dies der Ausdruck für die Erweiterung eines kontravarianten Tensors zweiten Ranges, der sich entsprechend auch für kontravariante Tensoren höheren und niedrigeren Ranges bilden läßt.

Wir merken an, daß sich auf analogem Wege auch die Erweiterung eines gemischten Tensors  $A_\mu^\alpha$  bilden läßt:

$$(39) \quad A_{\mu\sigma}^\alpha = \frac{\partial A_{\mu\sigma}^\alpha}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma & \mu \\ \tau & \end{matrix} \right\} A_\tau^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \sigma & \tau \\ \alpha & \end{matrix} \right\} A_\mu^\tau.$$

Durch Verjüngung von (38) bezüglich der Indizes  $\beta$  und  $\sigma$  (innere Multiplikation mit  $\delta_\sigma^\beta$ ) erhält man den kontravarianten Vierervektor

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta & \kappa \\ \beta & \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa} + \left\{ \begin{matrix} \beta & \kappa \\ \alpha & \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta}.$$

Wegen der Symmetrie von  $\left\{ \begin{matrix} \beta & \kappa \\ \alpha & \end{matrix} \right\}$  bezüglich der Indizes  $\beta$  und  $\kappa$  verschwindet das dritte Glied der rechten Seite, falls  $A^{\alpha\beta}$  ein antisymmetrischer Tensor ist, was wir annehmen wollen; das zweite Glied läßt sich gemäß (29a) umformen. Man erhält also

$$(40) \quad A^\alpha = \frac{1}{V-g} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}.$$

Dies ist der Ausdruck der Divergenz eines kontravarianten Sechservektors.

*Divergenz des gemischten Tensors zweiten Ranges.* Bilden wir die Verjüngung von (39) bezüglich der Indizes  $\alpha$  und  $\sigma$ , so erhalten wir mit Rücksicht auf (29a)

$$(41) \quad \sqrt{-g} A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g} A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \mu \\ \tau \end{matrix} \right\} \sqrt{-g} A_{\tau}^{\sigma}.$$

Führt man im letzten Gliede den kontravarianten Tensor  $A^{\sigma} = g^{\sigma\tau} A_{\tau}^{\sigma}$  ein, so nimmt es die Form an

$$- \left[ \begin{matrix} \sigma \mu \\ \varrho \end{matrix} \right] \sqrt{-g} A^{\varrho\sigma}.$$

Ist ferner der Tensor  $A^{\sigma\sigma}$  ein symmetrischer, so reduziert sich dies auf

$$- \frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A^{\varrho\sigma}.$$

Hätte man statt  $A^{\sigma\sigma}$  den ebenfalls symmetrischen kovarianten Tensor  $A_{\varrho\sigma} = g_{\varrho\alpha} g_{\sigma\beta} A^{\alpha\beta}$  eingeführt, so würde das letzte Glied vermöge (31) die Form

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A_{\varrho\sigma}$$

annehmen. In dem betrachteten Symmetriefalle kann also (41) auch durch die beiden Formen

$$(41a) \quad \sqrt{-g} A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g} A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g} A^{\varrho\sigma}$$

und

$$(41b) \quad \sqrt{-g} A_{\mu} = \frac{\partial (\sqrt{-g} A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g} A_{\varrho\sigma}$$

ersetzt werden, von denen wir im folgenden Gebrauch zu machen haben.

## § 12. Der Riemann-Christoffelsche Tensor.

Wir fragen nun nach denjenigen Tensoren, welche aus dem Fundamentaltensor der  $g_{\mu\nu}$  allein durch Differentiation gewonnen werden können. Die Antwort scheint zunächst auf der Hand zu liegen. Man setzt in (27) statt des beliebig gegebenen Tensors  $A_{\mu\nu}$  den Fundamentaltensor der  $g_{\mu\nu}$  ein und erhält dadurch einen neuen Tensor, nämlich die Erweiterung des Fundamentaltensors. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß diese letztere identisch verschwindet. Man gelangt jedoch auf folgendem Wege zum Ziel. Man setze in (27)

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \varrho \end{matrix} \right\} A_{\varrho},$$

d. h. die Erweiterung des Vierervektors  $A_\mu$  ein. Dann erhält man (bei etwas geänderter Benennung der Indizes) den Tensor dritten Ranges

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\varrho} + \left[ - \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \mu \\ \varrho \end{matrix} \right\} \right] A_\varrho.$$

Dieser Ausdruck ladet zur Bildung des Tensors  $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$  ein. Denn dabei heben sich folgende Terme des Ausdruckes für  $A_{\mu\sigma\tau}$  gegen solche von  $A_{\mu\tau\sigma}$  weg: das erste Glied, das vierte Glied, sowie das dem letzten Term in der eckigen Klammer entsprechende Glied; denn alle diese sind in  $\sigma$  und  $\tau$  symmetrisch. Gleiches gilt von der Summe des zweiten und dritten Gliedes. Wir erhalten also

$$(42) \quad A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B_{\mu\sigma\tau}^e A_\varrho,$$

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{\mu\sigma\tau}^e = - \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} \\ \quad - \left\{ \begin{matrix} \mu \sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \tau \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \varrho \end{matrix} \right\}. \end{array} \right.$$

Wesentlich ist an diesem Resultat, daß auf der rechten Seite von (42) nur die  $A_\varrho$ , aber nicht mehr ihre Ableitungen auftreten. Aus dem Tensorcharakter von  $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$  in Verbindung damit, daß  $A_\varrho$  ein frei wählbarer Vierervektor ist, folgt, vermöge der Resultate des § 7, daß  $B_{\mu\sigma\tau}^e$  ein Tensor ist (Riemann-Christoffelscher Tensor).

Die mathematische Bedeutung dieses Tensors liegt im folgenden. Wenn das Kontinuum so beschaffen ist, daß es ein Koordinatensystem gibt, bezüglich dessen die  $g_{\mu\nu}$  Konstanten sind, so verschwinden alle  $R_{\mu\sigma\tau}^e$ . Wählt man statt des ursprünglichen Koordinatensystems ein beliebiges neues, so werden die auf letzteres bezogenen  $g_{\mu\nu}$  nicht Konstanten sein. Der Tensorcharakter von  $R_{\mu\sigma\tau}^e$  bringt es aber mit sich, daß diese Komponenten auch in dem beliebig gewählten Bezugssystem sämtlich verschwinden. Das Verschwinden des Riemannschen Tensors ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß durch geeignete Wahl des Bezugssystems die Konstanten



der  $g_{\mu\nu}$  herbeigeführt werden kann.<sup>1)</sup> In unserem Problem entspricht dies dem Falle, daß bei passender Wahl des Koordinatensystems in endlichen Gebieten die spezielle Relativitätstheorie gilt.

Durch Verjüngung von (43) bezüglich der Indizes  $\tau$  und  $\varrho$  erhält man den kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$(44) \quad \begin{cases} B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \\ S_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{-g} - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sqrt{-g} \end{cases}$$

**Bemerkung über die Koordinatenwahl.** Es ist schon in § 8 im Anschluß an Gleichung (18a) bemerkt worden, daß die Koordinatenwahl mit Vorteil so getroffen werden kann, daß  $\sqrt{-g} = 1$  wird. Ein Blick auf die in den beiden letzten Paragraphen erlangten Gleichungen zeigt, daß durch eine solche Wahl die Bildungsgesetze der Tensoren eine bedeutende Vereinfachung erfahren. Besonders gilt dies für den soeben entwickelten Tensor  $B_{\mu\nu}$ , welcher in der darzulegenden Theorie eine fundamentale Rolle spielt. Die ins Auge gefaßte Spezialisierung der Koordinatenwahl bringt nämlich das Verschwinden von  $S_{\mu\nu}$  mit sich, so daß sich der Tensor  $B_{\mu\nu}$  auf  $R_{\mu\nu}$  reduziert.

Ich will deshalb im folgenden alle Beziehungen in der vereinfachten Form angeben, welche die genannte Spezialisierung der Koordinatenwahl mit sich bringt. Es ist dann ein Leichtes, auf die *allgemein* kovarianten Gleichungen zurückzugreifen, falls dies in einem speziellen Falle erwünscht erscheint.

### C. Theorie des Gravitationsfeldes.

#### § 13. Bewegungsgleichung des materiellen Punktes im Gravitationsfeld.

##### Ausdruck für die Feldkomponenten der Gravitation.

Ein frei beweglicher, äußeren Kräften nicht unterworfenen Körper bewegt sich nach der speziellen Relativitätstheorie geradlinig und gleichförmig. Dies gilt auch nach der allgemeinen

1) Die Mathematiker haben bewiesen, daß diese Bedingung auch eine *hinreichende* ist.

Relativitätstheorie für einen Teil des vierdimensionalen Raumes, in welchem das Koordinatensystem  $K_0$  so wählbar und so gewählt ist, daß die  $g_{\mu\nu}$  die in (4) gegebenen speziellen konstanten Werte haben.

Betrachten wir eben diese Bewegung von einem beliebig gewählten Koordinatensystem  $K_1$  aus, so bewegt er sich von  $K_1$  aus, beurteilt nach den Überlegungen des § 2 in einem Gravitationsfelde. Das Bewegungsgesetz mit Bezug auf  $K_1$  ergibt sich leicht aus folgender Überlegung. Mit Bezug auf  $K_0$  ist das Bewegungsgesetz eine vierdimensionale Gerade, also eine geodätische Linie. Da nun die geodätische Linie unabhängig vom Bezugssystem definiert ist, wird ihre Gleichung auch die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in bezug auf  $K_1$  sein. Setzen wir

$$(45) \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} = - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \tau \end{matrix} \right\},$$

so lautet also die Gleichung der Punktbeziehung in bezug auf  $K_1$

$$(46) \quad \frac{d^2 x_{\tau}}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds}.$$

Wir machen nun die sehr naheliegende Annahme, daß dieses allgemein kovariante Gleichungssystem die Bewegung des Punktes im Gravitationsfeld auch in dem Falle bestimmt, daß kein Bezugssystem  $K_0$  existiert, bezüglich dessen in endlichen Räumen die spezielle Relativitätstheorie gilt. Zu dieser Annahme sind wir um so berechtigter, als (46) nur *erste* Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  enthält, zwischen denen auch im Spezialfalle der Existenz von  $K_0$  keine Beziehungen bestehen.<sup>1)</sup>

Verschwinden die  $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ , so bewegt sich der Punkt geradlinig und gleichförmig; diese Größen bedingen also die Abweichung der Bewegung von der Gleichförmigkeit. Sie sind die Komponenten des Gravitationsfeldes.

#### § 14. Die Feldgleichungen der Gravitation bei Abwesenheit von Materie.

Wir unterscheiden im folgenden zwischen „Gravitationsfeld“ und „Materie“, in dem Sinne, daß alles außer dem Gravitationsfeld als „Materie“ bezeichnet wird, also nicht nur

1) Erst zwischen den zweiten (und ersten) Ableitungen bestehen gemäß § 12 die Beziehungen  $B_{\mu\sigma\tau}^{\rho} = 0$ .

die „Materie“ im üblichen Sinne, sondern auch das elektromagnetische Feld.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Feldgleichungen der Gravitation bei Abwesenheit von Materie aufzusuchen. Dabei verwenden wir wieder dieselbe Methode wie im vorigen Paragraphen bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes. Ein Spezialfall, in welchem die gesuchten Feldgleichungen jedenfalls erfüllt sein müssen, ist der der ursprünglichen Relativitätstheorie, in dem die  $g_{\mu\nu}$  gewisse konstante Werte haben. Dies sei der Fall in einem gewissen endlichen Gebiete in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem  $K_0$ . In bezug auf dies System verschwinden sämtliche Komponenten  $B_{\mu\sigma\tau}^e$  des Riemannschen Tensors [Gleichung (43)]. Diese verschwinden dann für das betrachtete Gebiet auch bezüglich jedes anderen Koordinatensystems.

Die gesuchten Gleichungen des materiefreien Gravitationsfeldes müssen also jedenfalls erfüllt sein, wenn alle  $B_{\mu\sigma\tau}^e$  verschwinden. Aber diese Bedingung ist jedenfalls eine zu weitgehende. Denn es ist klar, daß z. B. das von einem Massenpunkte in seiner Umgebung erzeugte Gravitationsfeld sicherlich durch keine Wahl des Koordinatensystems „wegtransformiert“, d. h. auf den Fall konstanter  $g_{\mu\nu}$  transformiert werden kann.

Deshalb liegt es nahe, für das materiefreie Gravitationsfeld das Verschwinden des aus dem Tensor  $B_{\mu\sigma\tau}^e$  abgeleiteten symmetrischen Tensors  $B_{\mu\nu}$  zu verlangen. Man erhält so 10 Gleichungen für die 10 Größen  $g_{\mu\nu}$ , welche im speziellen erfüllt sind, wenn sämtliche  $B_{\mu\sigma\tau}^e$  verschwinden. Diese Gleichungen lauten mit Rücksicht auf (44) bei der von uns getroffenen Wahl für das Koordinatensystem für das materiefreie Feld

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Es muß darauf hingewiesen werden, daß der Wahl dieser Gleichungen ein Minimum von Willkür anhaftet. Denn es gibt außer  $B_{\mu\nu}$  keinen Tensor zweiten Ranges, der aus den

$g_{\mu\nu}$  und deren Ableitungen gebildet ist, keine höheren als zweite Ableitungen enthält und in letzteren linear ist.<sup>1)</sup>

Daß diese aus der Forderung der allgemeinen Relativität auf rein mathematischem Wege fließenden Gleichungen in Verbindung mit den Bewegungsgleichungen (46) in erster Näherung das Newtonsche Attraktionsgesetz, in zweiter Näherung die Erklärung der von Leverrier entdeckten (nach Anbringung der Störungskorrekturen übrigbleibenden) Perihelbewegung des Merkur liefern, muß nach meiner Ansicht von der physikalischen Richtigkeit der Theorie überzeugen.

### § 15. Hamiltonsche Funktion für das Gravitationsfeld, Impulsenergiesatz.

Um zu zeigen, daß die Feldgleichungen dem Impulsenergiesatz entsprechen, ist es am bequemsten, sie in folgender Hamiltonscher Form zu schreiben:

$$(47a) \quad \begin{cases} \delta \left\{ \int H d\tau \right\} = 0 \\ H = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Dabei verschwinden die Variationen an den Grenzen des betrachteten begrenzten vierdimensionalen Integrationsraumes.

Es ist zunächst zu zeigen, daß die Form (47a) den Gleichungen (47) äquivalent ist. Zu diesem Zweck betrachten wir  $H$  als Funktion der  $g^{\mu\nu}$  und der

$$g_{\sigma}^{\mu\nu} \left( = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \right).$$

Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} \delta H &= \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \\ &= -\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \delta g^{\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta (g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\delta (g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}) = -\frac{1}{2} \delta \left[ g^{\mu\nu} g^{\beta\lambda} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}} \right) \right]. \quad (49)$$

1) Eigentlich läßt sich dies nur von dem Tensor  $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$  ( $g^{\mu\beta} B_{\mu\beta}$ ) behaupten, wobei  $\lambda$  eine Konstante ist. Setzt man jedoch diesen = 0, so kommt man wieder zu den Gleichungen  $B_{\mu\nu} = 0$ .

Die aus den beiden letzten Termen der runden Klammer hervorgehenden Terme sind von verschiedenem Vorzeichen und gehen auseinander (da die Benennung der Summationsindizes belanglos ist) durch Vertauschung der Indizes  $\mu$  und  $\beta$  hervor. Sie heben einander im Ausdruck für  $\delta H$  weg, weil sie mit der bezüglich der Indizes  $\mu$  und  $\beta$  symmetrischen Größe  $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$  multipliziert werden. Es bleibt also nur das erste Glied der runden Klammer zu berücksichtigen, so daß man mit Rücksicht auf (31) erhält

$$\delta H = -\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\beta} \delta g^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta g_{\alpha}^{\mu\beta}.$$

Es ist also

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\beta} \\ \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\beta}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \end{cases}$$

Die Ausführung der Variation in (47a) ergibt zunächst das Gleichungssystem

$$(47b) \quad \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

welches wegen (48) mit (47) übereinstimmt, was zu beweisen war. — Multipliziert man (47b) mit  $g_{\sigma}^{\mu\nu}$ , so erhält man, weil

$$\frac{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

und folglich

$$g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_{\sigma}} = 0$$

oder<sup>1)</sup>

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \\ -2 \kappa t_{\sigma}^{\alpha} = g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \delta_{\sigma}^{\alpha} H, \end{cases}$$

1) Der Grund der Einführung des Faktors  $-2 \kappa$  wird später deutlich werden.

oder, wegen (48), der zweiten Gleichung (47) und (34)

$$(50) \quad \kappa t_{\sigma}^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}.$$

Es ist zu beachten, daß  $t_{\sigma}^{\alpha}$  kein Tensor ist; dagegen gilt (49) für alle Koordinatensysteme, für welche  $\sqrt{-g} = 1$  ist. Diese Gleichung drückt den Erhaltungssatz des Impulses und der Energie für das Gravitationsfeld aus. In der Tat liefert die Integration dieser Gleichung über ein dreidimensionales Volumen  $V$  die vier Gleichungen

$$(49a) \quad \frac{d}{dx_4} \left\{ \int t_{\sigma}^{\alpha} dV \right\} = \int (t_{\sigma}^1 \alpha_1 + t_{\sigma}^2 \alpha_2 + t_{\sigma}^3 \alpha_3) dS,$$

wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  der Richtungskosinus der nach innen gerichteten Normale eines Flächenelementes der Begrenzung von der Größe  $dS$  (im Sinne der euklidischen Geometrie) bedeuten. Man erkennt hierin den Ausdruck der Erhaltungssätze in üblicher Fassung. Die Größen  $t_{\sigma}^{\alpha}$  bezeichnen wir als die „Energiekomponenten“ des Gravitationsfeldes.

Ich will nun die Gleichungen (47) noch in einer dritten Form angeben, die einer lebendigen Erfassung unseres Gegenstandes besonders dienlich ist. Durch Multiplikation der Feldgleichungen (47) mit  $g^{\nu\sigma}$  ergeben sich diese in der „gemischten“ Form. Beachtet man, daß

$$g^{\nu\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_{\alpha}} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha},$$

welche Größe wegen (34) gleich

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\sigma\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha},$$

oder (nach geänderter Benennung der Summationsindizes) gleich

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) - g^{\sigma n} \Gamma_{m\beta}^{\sigma} \Gamma_{n\mu}^{\beta} - g^{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}.$$

Das dritte Glied dieses Ausdrucks hebt sich weg gegen das aus dem zweiten Glied der Feldgleichungen (47) entstehende; an Stelle des zweiten Gliedes dieses Ausdruckes läßt sich nach Beziehung (50)

$$\kappa (t_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} t)$$

setzen ( $t = t_{\alpha}^{\alpha}$ ). Man erhält also an Stelle der Gleichungen (47)

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) = -\kappa (t_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} t) \\ \sqrt{-g} = 1. \end{array} \right.$$

§ 16. Allgemeine Fassung der Feldgleichungen der Gravitation.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Feldgleichungen für materiefreie Räume sind mit der Feldgleichung

$$\Delta \varphi = 0$$

der Newtonschen Theorie zu vergleichen. Wir haben die Gleichungen aufzusuchen, welche der Poissonschen Gleichung

$$\Delta \varphi = 4\pi \kappa \varrho$$

entspricht, wobei  $\varrho$  die Dichte der Materie bedeutet.

Die spezielle Relativitätstheorie hat zu dem Ergebnis geführt, daß die träge Masse nichts anderes ist als Energie, welche ihren vollständigen mathematischen Ausdruck in einem symmetrischen Tensor zweiten Ranges, dem Energietensor, findet. Wir werden daher auch in der allgemeinen Relativitätstheorie einen Energietensor der Materie  $T_{\sigma}^{\alpha}$  einzuführen haben, der wie die Energiekomponenten  $t_{\sigma}^{\alpha}$  [Gleichungen (49) und (50)] des Gravitationsfeldes gemischten Charakter haben wird, aber zu einem symmetrischen kovarianten Tensor gehören wird<sup>1)</sup>.

Wie dieser Energietensor (entsprechend der Dichte  $\varrho$  in der Poissonschen Gleichung) in die Feldgleichungen der Gravitation einzuführen ist, lehrt das Gleichungssystem (51). Betrachtet man nämlich ein vollständiges System (z. B. das Sonnensystem), so wird die Gesamtmasse des Systems, also auch seine gesamte gravitierende Wirkung, von der Gesamtenergie des Systems, also von der ponderablen und Gravitationsenergie zusammen, abhängen. Dies wird sich dadurch ausdrücken lassen, daß man in (51) an Stelle der Energiekomponenten  $t_{\mu}^{\sigma}$  des Gravitationsfeldes allein die Summen  $t_{\mu}^{\sigma} + T_{\mu}^{\sigma}$  der Energiekomponenten von Materie und Gravitationsfeld einführt. Man erhält so statt (51) die Tensorgleichung

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\sigma\beta} T_{\mu}^{\alpha}) &= -\kappa [(t_{\mu}^{\sigma} + T_{\mu}^{\sigma}) - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} (t + T)] \\ \sqrt{-g} &= 1, \end{aligned} \right.$$

wobei  $T = T_{\mu}^{\mu}$  gesetzt ist (Lauescher Skalar). Dies sind die gesuchten allgemeinen Feldgleichungen der Gravitation in ge-

1)  $g_{\sigma\tau} T_{\sigma}^{\alpha} = T_{\sigma\tau}$  und  $g^{\sigma\beta} T_{\sigma}^{\alpha} = T^{\alpha\beta}$  sollen symmetrische Tensoren sein.

mischer Form. An Stelle von (47) ergibt sich daraus rückwärts das System

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T), \\ \sqrt{-g} = 1. \end{array} \right.$$

Es muß zugegeben werden, daß diese Einführung des Energietensors der Materie durch das Relativitätspostulat allein nicht gerechtfertigt wird; deshalb haben wir sie im vorigen aus der Forderung abgeleitet, daß die Energie des Gravitationsfeldes in gleicher Weise gravitierend wirken soll, wie jegliche Energie anderer Art. Der stärkste Grund für die Wahl der vorstehenden Gleichungen liegt aber darin, daß sie zur Folge haben, daß für die Komponenten der Totalenergie Erhaltungsgleichungen (des Impulses und der Energie) gelten, welche den Gleichungen (49) und (49a) genau entsprechen. Dies soll im folgenden dargetan werden.

#### § 17. Die Erhaltungssätze im allgemeinen Falle.

Die Gleichung (52) ist leicht so umzuformen, daß auf der rechten Seite das zweite Glied wegfällt. Man verjünge (52) nach den Indizes  $\mu$  und  $\sigma$  und subtrahiere die so erhaltene, mit  $\frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma}$  multiplizierte Gleichung von (52). Es ergibt sich

$$(52a) \quad \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}) = -\kappa (t_{\mu}^{\sigma} + T_{\mu}^{\sigma}).$$

An dieser Gleichung bilden wir die Operation  $\partial/\partial x_{\sigma}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\sigma}} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\sigma}} \left[ g^{\sigma\beta} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\lambda}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Das erste und das dritte Glied der runden Klammer liefern Beiträge, die einander wegheben, wie man erkennt, wenn man im Beitrage des dritten Gliedes die Summationsindizes  $\alpha$  und  $\sigma$  einerseits,  $\beta$  und  $\lambda$  andererseits vertauscht. Das zweite Glied läßt sich nach (31) umformen, so daß man erhält

$$(54) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\sigma}} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \partial x_{\mu}}.$$

Das zweite Glied der linken Seite von (52a) liefert zunächst

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\mu}} (g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha})$$



$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} \left[ g^{\lambda\beta} g^{\alpha\delta} \left( \frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta} \right) \right].$$

Das vom letzten Glied der runden Klammer herrührende Glied verschwindet wegen (29) bei der von uns getroffenen Koordinatenwahl. Die beiden anderen lassen sich zusammenfassen und liefern wegen (31) zusammen

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

so daß mit Rücksicht auf (54) die Identität

$$(55) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha) \equiv 0$$

besteht. Aus (55) und (52a) folgt

$$(56) \quad \frac{\partial (t_{\mu}^\sigma + T_{\mu}^\sigma)}{\partial x_\sigma} = 0.$$

Aus unseren Feldgleichungen der Gravitation geht also hervor, daß den Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie Genüge geleistet ist. Man sieht dies am einfachsten nach der Betrachtung ein, die zu Gleichung (49a) führt; nur hat man hier an Stelle der Energiekomponenten  $t_{\mu}^\sigma$  des Gravitationsfeldes die Gesamtenergiekomponenten von Materie und Gravitationsfeld einzuführen.

### § 18. Der Impulsenergiesatz für die Materie als Folge der Feldgleichungen.

Multipliziert man (53) mit  $\partial g^{\mu\nu} / \partial x_\sigma$ , so erhält man auf dem in § 15 eingeschlagenen Wege mit Rücksicht auf das Verschwinden von

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial t_{\sigma}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (56)

$$(57) \quad \frac{\partial T_{\sigma}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu} = 0.$$

Ein Vergleich mit (41b) zeigt, daß diese Gleichung bei der getroffenen Wahl für das Koordinatensystem nichts anderes

aussagt als das Verschwinden der Divergenz des Tensors der Energiekomponenten der Materie. Physikalisch zeigt das Auftreten des zweiten Gliedes der linken Seite, daß für die Materie allein Erhaltungssätze des Impulses und der Energie im eigentlichen Sinne nicht, bzw. nur dann gelten, wenn die  $g^{\mu\nu}$  konstant sind, d. h. wenn die Feldstärken der Gravitation verschwinden. Dies zweite Glied ist ein Ausdruck für Impuls bzw. Energie, welche pro Volumen und Zeiteinheit vom Gravitationsfelde auf die Materie übertragen werden. Dies tritt noch klarer hervor, wenn man statt (57) im Sinne von (41) schreibt

$$(57a) \quad \frac{\partial T_{\alpha}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = - \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta}.$$

Die rechte Seite drückt die energetische Einwirkung des Gravitationsfeldes auf die Materie aus.

Die Feldgleichungen der Gravitation enthalten also gleichzeitig vier Bedingungen, welchen der materielle Vorgang zu genügen hat. Sie liefern die Gleichungen des materiellen Vorganges vollständig, wenn letzterer durch vier voneinander unabhängige Differentialgleichungen charakterisierbar ist.<sup>1)</sup>

#### D. Die „materiellen“ Vorgänge.

Die unter B entwickelten mathematischen Hilfsmittel setzen uns ohne weiteres in den Stand, die physikalischen Gesetze der Materie (Hydrodynamik, Maxwell'sche Elektrodynamik), wie sie in der speziellen Relativitätstheorie formuliert vorliegen, so zu verallgemeinern, daß sie in die allgemeine Relativitätstheorie hineinpassen. Dabei ergibt das allgemeine Relativitätsprinzip zwar keine weitere Einschränkung der Möglichkeiten; aber es lehrt den Einfluß des Gravitationsfeldes auf alle Prozesse exakt kennen, ohne daß irgendwelche neue Hypothese eingeführt werden müßte.

Diese Sachlage bringt es mit sich, daß über die physikalische Natur der Materie (im engeren Sinne) nicht notwendig bestimmte Voraussetzungen eingeführt werden müssen. Insbesondere kann die Frage offen bleiben, ob die Theorie des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes zu-

1) Vgl. hierüber D. Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse. p. 3. 1915.

sammen eine hinreichende Basis für die Theorie der Materie liefern oder nicht. Das allgemeine Relativitätspostulat kann uns hierüber im Prinzip nichts lehren. Es muß sich bei dem Ausbau der Theorie zeigen, ob Elektromagnetik und Gravitationslehre zusammen leisten können, was ersterer allein nicht gelingen will.

§ 19. Eulersche Gleichungen für reibungslose adiabatische Flüssigkeiten.

Es seien  $p$  und  $\varrho$  zwei Skalare, von denen wir ersteren als den „Druck“, letzteren als die „Dichte“ einer Flüssigkeit bezeichnen; zwischen ihnen bestehe eine Gleichung. Der kontravariante symmetrische Tensor

$$(58) \quad T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \varrho \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$$

sei der kontravariante Energietensor der Flüssigkeit. Zu ihm gehört der kovariante Tensor

$$(58a) \quad T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} g_{\nu\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \varrho,$$

sowie der gemischte Tensor<sup>1)</sup>

$$(58b) \quad T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \varrho.$$

Setzt man die rechte Seite von (58b) in (57a) ein, so erhält man die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Diese lösen das Bewegungsproblem im Prinzip vollständig; denn die vier Gleichungen (57a) zusammen mit der gegebenen Gleichung zwischen  $p$  und  $\varrho$  und der Gleichung

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

genügen bei gegebenen  $g_{\alpha\beta}$  zur Bestimmung der 6 Unbekannten

$$p, \varrho, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}.$$

1) Für einen mitbewegten Beobachter, der im unendlich Kleinen ein Bezugssystem im Sinne der speziellen Relativitätstheorie benutzt, ist die Energiedichte  $T_4^4$  gleich  $\varrho - p$ . Hierin liegt die Definition von  $\varrho$ . Es ist also  $\varrho$  nicht konstant für eine inkompressible Flüssigkeit.

Sind auch die  $g_{\mu\nu}$  unbekannt, so kommen hierzu noch die Gleichungen (53). Dies sind 11 Gleichungen zur Bestimmung der 10 Funktionen  $g_{\mu\nu}$ , so daß diese überbestimmt scheinen. Es ist indessen zu beachten, daß die Gleichungen (57a) in den Gleichungen (53) bereits enthalten sind, so daß letztere nur mehr 7 unabhängige Gleichungen repräsentieren. Diese Unbestimmtheit hat ihren guten Grund darin, daß die weitgehende Freiheit in der Wahl der Koordinaten es mit sich bringt, daß das Problem mathematisch in solchem Grade unbestimmt bleibt, daß drei der Raumfunktionen beliebig gewählt werden können.<sup>1)</sup>

### § 20. Maxwell'sche elektromagnetische Feldgleichungen für das Vakuum.

Es seien  $\varphi_\nu$  die Komponenten eines kovarianten Vierervektors, des Vierervektors des elektromagnetischen Potentials. Aus ihnen bilden wir gemäß (36) die Komponenten  $F_{\sigma\tau}$  des kovarianten Sechservektors des elektromagnetischen Feldes gemäß dem Gleichungssystem

$$(59) \quad F_{\sigma\tau} = \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\tau}.$$

Aus (59) folgt, daß das Gleichungssystem

$$(60) \quad \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\tau\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} = 0$$

erfüllt ist, dessen linke Seite gemäß (37) ein antisymmetrischer Tensor dritten Ranges ist. Das System (60) enthält also im wesentlichen 4 Gleichungen, die ausgeschrieben wie folgt lauten:

$$(60a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right.$$

1) Bei Verzicht auf die Koordinatenwahl gemäß  $g = -1$  blieben vier Raumfunktionen frei wählbar, entsprechend den vier willkürlichen Funktionen, über die man bei der Koordinatenwahl frei verfügen kann.

Dieses Gleichungssystem entspricht dem zweiten Gleichungssystem Maxwells. Man erkennt dies sofort, indem man setzt

$$(61) \quad \begin{cases} F_{23} = h_x & F_{14} = e_x \\ F_{31} = h_y & F_{24} = e_y \\ F_{12} = h_z & F_{34} = e_z. \end{cases}$$

Dann kann man statt (60a) in üblicher Schreibweise der dreidimensionalen Vektoranalyse setzen

$$(60b) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{rot } e = 0 \\ \text{div } h = 0. \end{cases}$$

Das erste Maxwellsche System erhalten wir durch Verallgemeinerung der von Minkowski angegebenen Form. Wir führen den zu  $F_{\alpha\beta}$  gehörigen kontravarianten Sechservektor

$$(62) \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

ein sowie den kontravarianten Vierervektor  $J^\mu$  der elektrischen Vakuumstromdichte; dann kann man das mit Rücksicht auf (40) gegenüber beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 (gemäß der von uns getroffenen Koordinatenwahl) invariante Gleichungssystem ansetzen:

$$(63) \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^\mu.$$

Setzt man nämlich

$$(64) \quad \begin{cases} F^{23} = h'_x & F^{14} = -e'_x \\ F^{31} = h'_y & F^{24} = -e'_y \\ F^{12} = h'_z & F^{34} = -e'_z, \end{cases}$$

welche Größen im Spezialfall der speziellen Relativitätstheorie den Größen  $h_x \dots e_z$  gleich sind, und außerdem

$$J^1 = i_x, \quad J^2 = i_y, \quad J^3 = i_z, \quad J^4 = \varrho,$$

so erhält man an Stelle von (63)

$$(63a) \quad \begin{cases} \text{rot } h' - \frac{\partial e'}{\partial t} = i \\ \text{div } e' = \varrho. \end{cases}$$

Die Gleichungen (60), (62) und (63) bilden also die Verallgemeinerung der Maxwellschen Feldgleichungen des

Vakuums bei der von uns bezüglich der Koordinatenwahl getroffenen Festsatzung.

Die Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes. Wir bilden das innere Produkt

$$(65) \quad \kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu.$$

Seine Komponenten lauten gemäß (61) in dreidimensionaler Schreibweise

$$(65a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = \varrho e_x + [i, h]_x \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \kappa_4 = - (i, c). \end{array} \right.$$

Es ist  $\kappa_\sigma$  ein kovarianter Vierervektor, dessen Komponenten gleich sind dem negativen Impuls bzw. der Energie, welche pro Zeit- und Volumeinheit auf das elektromagnetische Feld von den elektrischen Massen übertragen werden. Sind die elektrischen Massen frei, d. h. unter dem alleinigen Einfluß des elektromagnetischen Feldes, so wird der kovariante Vierervektor  $\kappa_\sigma$  verschwinden.

Um die Energiekomponenten  $T_\sigma^\nu$  des elektromagnetischen Feldes zu erhalten, brauchen wir nur der Gleichung  $\kappa_\sigma = 0$  die Gestalt der Gleichung (57) zu geben. Aus (63) und (65) ergibt sich zunächst

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Das zweite Glied der rechten Seite gestattet vermöge (60) die Umformung

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

welch letzterer Ausdruck aus Symmetriegründen auch in der Form

$$-\frac{1}{4} \left[ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu} \right]$$

geschrieben werden kann. Dafür aber läßt sich setzen

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}),$$

Das erste dieser Glieder lautet in kürzerer Schreibweise

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}),$$

das zweite ergibt nach Ausführung der Differentiation nach einiger Umformung

$$-\frac{1}{2} F^{\mu\tau} F_{\mu\nu} g^{\nu\epsilon} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Nimmt man alle drei berechneten Glieder zusammen, so erhält man die Relation

$$(66) \quad \kappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu,$$

wobei

$$(66a) \quad T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Die Gleichung (66) ist für verschwindendes  $\kappa_\sigma$  wegen (30) mit (57) bzw. (57a) gleichwertig. Es sind also die  $T_\sigma^\nu$  die Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes. Mit Hilfe von (61) und (64) zeigt man leicht, daß diese Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes im Falle der speziellen Relativitätstheorie die wohlbekannten Maxwell-Poyntingschen Ausdrücke ergeben.

Wir haben nun die allgemeinsten Gesetze abgeleitet, welchen das Gravitationsfeld und die Materie genügen, indem wir uns konsequent eines Koordinatensystems bedienen, für welches  $\sqrt{-g} = 1$  wird. Wir erhielten dadurch eine erhebliche Vereinfachung der Formeln und Rechnungen, ohne daß wir auf die Forderung der allgemeinen Kovarianz verzichtet hätten: denn wir fanden unsere Gleichungen durch Spezialisierung des Koordinatensystems aus allgemein kovarianten Gleichungen.

Immerhin ist die Frage nicht ohne formales Interesse, ob bei entsprechend verallgemeinerter Definition der Energiekomponenten des Gravitationsfeldes und der Materie auch ohne Spezialisierung des Koordinatensystems Erhaltungssätze von der Gestalt der Gleichung (56) sowie Feldgleichungen der Gravitation von der Art der Gleichungen (52) bzw. (52a) gelten, derart, daß links eine Divergenz (im gewöhnlichen Sinne), rechts die Summe der Energiekomponenten der Materie und der Gravitation steht. Ich habe gefunden, daß beides in der Tat der Fall ist. Doch glaube ich, daß sich eine Mitteilung meiner ziemlich umfangreichen Betrachtungen über diesen Gegenstand nicht lohnen würde; da doch etwas sachlich Neues dabei nicht herauskommt.

## E. § 21. Newtons Theorie als erste Näherung.

Wie schon mehrfach erwähnt, ist die spezielle Relativitätstheorie als Spezialfall der allgemeinen dadurch charakterisiert, daß die  $g_{\mu\nu}$  die konstanten Werte (4) haben. Dies bedeutet nach dem Vorherigen eine völlige Vernachlässigung der Gravitationswirkungen. Eine der Wirklichkeit näher liegende Approximation erhalten wir, indem wir den Fall betrachten, daß die  $g_{\mu\nu}$  von den Werten (4) nur um (gegen 1) kleine Größen abweichen, wobei wir kleine Größen zweiten und höheren Grades vernachlässigen. (Erster Gesichtspunkt der Approximation.)

Ferner soll angenommen werden, daß in dem betrachteten zeiträumlichen Gebiete die  $g_{\mu\nu}$  im räumlich Unendlichen bei passender Wahl der Koordinaten den Werten (4) zustreben; d. h. wir betrachten Gravitationsfelder, welche als ausschließlich durch im Endlichen befindliche Materie erzeugt betrachtet werden können.

Man könnte annehmen, daß diese Vernachlässigungen auf Newtons Theorie hinführen müßten. Indessen bedarf es hierfür noch der approximativen Behandlung der Grundgleichungen nach einem zweiten Gesichtspunkte. Wir fassen die Bewegung eines Massenpunktes gemäß den Gleichungen (46) ins Auge. Im Falle der speziellen Relativitätstheorie können die Komponenten

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

beliebige Werte annehmen; dies bedeutet, daß beliebige Geschwindigkeiten

$$v = \sqrt{\frac{dx_1^2}{ds^2} + \frac{dx_2^2}{ds^2} + \frac{dx_3^2}{ds^2}}$$

auftreten können, die kleiner sind als die Vakuumlichtgeschwindigkeit ( $v < 1$ ). Will man sich auf den fast ausschließlich der Erfahrung sich darbietenden Fall beschränken, daß  $v$  gegen die Lichtgeschwindigkeit klein ist, so bedeutet dies, daß die Komponenten

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

als kleine Größen zu behandeln sind, während  $dx_4/ds$  bis auf Größen zweiter Ordnung gleich 1 ist (zweiter Gesichtspunkt der Approximation).



Nun beachten wir, daß nach dem ersten Gesichtspunkte der Approximation die Größen  $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$  alle kleine Größen mindestens erster Ordnung sind. Ein Blick auf (46) lehrt also, daß in dieser Gleichung nach dem zweiten Gesichtspunkt der Approximation nur Glieder zu berücksichtigen sind, für welche  $\mu = \nu = 4$  ist. Bei Beschränkung auf Glieder niedrigster Ordnung erhält man an Stelle von (46) zunächst die Gleichungen

$$\frac{d^2 x_{\tau}}{dt^2} = \Gamma_{44}^{\tau},$$

wobei  $ds = dx_4 = dt$  gesetzt ist, oder unter Beschränkung auf Glieder, die nach dem ersten Gesichtspunkte der Approximation erster Ordnung sind:

$$\frac{d^2 x_{\tau}}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} (\tau = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} = - \begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Setzt man außerdem voraus, daß das Gravitationsfeld ein quasi statisches sei, indem man sich auf den Fall beschränkt, daß die das Gravitationsfeld erzeugende Materie nur langsam (im Vergleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) bewegt ist, so kann man auf der rechten Seite Ableitungen nach der Zeit neben solchen nach den örtlichen Koordinaten vernachlässigen, so daß man erhält

$$(67) \quad \frac{d^2 x_{\tau}}{dt^2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_{\tau}} (\tau = 1, 2, 3).$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes nach Newtons Theorie, wobei  $g_{44}/2$  die Rolle des Gravitationspotentials spielt. Das Merkwürdige an diesem Resultat ist, daß nur die Komponente  $g_{44}$  des Fundamentaltensors allein in erster Näherung die Bewegung des materiellen Punktes bestimmt.

Wir wenden uns nun zu den Feldgleichungen (53). Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Energietensor der „Materie“ fast ausschließlich durch die Dichte  $\varrho$  der Materie im engeren Sinne bestimmt wird, d. h. durch das zweite Glied der rechten Seite von (58) [bzw. (58a) oder (58b)]. Bildet man die uns interessierende Näherung, so verschwinden alle Komponenten bis auf die Komponente

$$T_{44} = \varrho = T.$$

Auf der linken Seite von (53) ist das zweite Glied klein von zweiter Ordnung; das erste liefert in der uns interessierenden Näherung

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \begin{smallmatrix} \mu \nu \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \begin{smallmatrix} \mu \nu \\ 2 \end{smallmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \begin{smallmatrix} \mu \nu \\ 3 \end{smallmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_4} \left[ \begin{smallmatrix} \mu \nu \\ 4 \end{smallmatrix} \right].$$

Dies liefert für  $\mu = \nu = 4$  bei Weglassung von nach der Zeit differenzierten Gliedern

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} \right) = - \frac{1}{2} \Delta g_{44}.$$

Die letzte der Gleichungen (53) liefert also

$$(68) \quad \Delta g_{44} = \kappa \varrho.$$

Die Gleichungen (67) und (68) zusammen sind äquivalent dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

Für das Gravitationspotential ergibt sich nach (67) und (68) der Ausdruck

$$(68a) \quad - \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\varrho d\tau}{r},$$

während Newtons Theorie bei der von uns gewählten Zeiteinheit

$$- \frac{K}{c^2} \int \frac{\varrho d\tau}{r}$$

ergibt, wobei  $K$  die gewöhnlich als Gravitationskonstante bezeichnete Konstante  $6,7 \cdot 10^{-8}$  bedeutet. Durch Vergleich ergibt sich

$$(69) \quad \kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1,87 \cdot 10^{-27}.$$

## § 22. Verhalten von Maßstäben und Uhren im statischen Gravitationsfelde. Krümmung der Lichtstrahlen. Perihelbewegung der Planetenbahnen.

Um die Newtonsche Theorie als erste Näherung zu erhalten, brauchten wir von den 10 Komponenten des Gravitationspotentials  $g_{\mu\nu}$  nur  $g_{44}$  zu berechnen, da nur diese Komponente in die erste Näherung (67) der Bewegungsgleichung des materiellen Punktes im Gravitationsfelde eingeht. Man sieht indessen schon daraus, daß noch andere Komponenten der  $g_{\mu\nu}$  von den in (4) angegebenen Werten in erster Näherung abweichen müssen, daß letzteres durch die Bedingung  $g = -1$  verlangt wird.

Für einen im Anfangspunkt des Koordinatensystems befindlichen felderzeugenden Massenpunkt erhält man in erster Näherung die radialsymmetrische Lösung

$$(70) \quad \begin{cases} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \quad (\rho \text{ und } \sigma \text{ zwischen } 1 \text{ und } 3) \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \quad (\rho \text{ zwischen } 1 \text{ und } 3) \\ g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r} \end{cases}$$

$\delta_{\rho\sigma}$  ist dabei 1 bzw. 0, je nachdem  $\rho = \sigma$  oder  $\rho \neq \sigma$ ,  $r$  ist die Größe

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Dabei ist wegen (68a)

$$(70a) \quad \alpha = \frac{\kappa M}{8\pi},$$

wenn mit  $M$  die felderzeugende Masse bezeichnet wird. Daß durch diese Lösung die Feldgleichungen (außerhalb der Masse) in erster Näherung erfüllt werden, ist leicht zu verifizieren.

Wir untersuchen nun die Beeinflussung, welche die metrischen Eigenschaften des Raumes durch das Feld der Masse  $M$  erfahren. Stets gilt zwischen den „lokal“ (§ 4) gemessenen Längen und Zeiten  $ds$  einerseits und den Koordinatendifferenzen  $dx_\nu$  andererseits die Beziehung

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Für einen „parallel“ der  $x$ -Achse gelegten Einheitsmaßstab wäre beispielsweise zu setzen

$$ds^2 = -1; \quad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

also

$$-1 = g_{11} dx_1^2.$$

Liegt der Einheitsmaßstab außerdem auf der  $x$ -Achse, so ergibt die erste der Gleichungen (70)

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Aus beiden Relationen folgt in erster Näherung genau

$$(71) \quad dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}.$$

Der Einheitsmaßstab erscheint also mit Bezug auf das Koordinatensystem in dem gefundenen Betrage durch das Vorhandensein des Gravitationsfeldes verkürzt, wenn er radial angelegt wird.

Analog erhält man seine Koordinatenlänge in tangentialer Richtung, indem man beispielsweise setzt

$$ds^2 = -1; \quad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0; \quad x_1 = r, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Es ergibt sich

$$(71a) \quad -1 = g_{22} dx_2^2 = -dx_2^2.$$

Bei tangentialer Stellung hat also das Gravitationsfeld des Massenpunktes keinen Einfluß auf die Stablänge.

Es gilt also die Euklidische Geometrie im Gravitationsfelde nicht einmal in erster Näherung, falls man einen und denselben Stab unabhängig von seinem Ort und seiner Orientierung als Realisierung derselben Strecke auffassen will. Allerdings zeigt ein Blick auf (70a) und (69), daß die zu erwartenden Abweichungen viel zu gering sind, um sich bei der Vermessung der Erdoberfläche bemerkbar machen zu können.

Es werde ferner die auf die Zeitkoordinate untersuchte Ganggeschwindigkeit einer Einheitsuhr untersucht, welche in einem statischen Gravitationsfelde ruhend angeordnet ist. Hier gilt für eine Uhrperiode

$$ds = 1; \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Also ist

$$1 = g_{44} dx_4^2;$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

oder

$$(72) \quad dx_4 = 1 + \frac{x}{8\pi} \int \frac{\rho dr}{r}.$$

Die Uhr läuft also langsamer, wenn sie in der Nähe ponderabler Massen aufgestellt ist. Es folgt daraus, daß die Spektrallinien von der Oberfläche großer Sterne zu uns gelangenden Lichtes nach dem roten Spektralende verschoben erscheinen müssen.<sup>1)</sup>

1) Für das Bestehen eines derartigen Effektes sprechen nach E. Freundlich spektrale Beobachtungen an Fixsternen bestimmter Typen. Eine endgültige Prüfung dieser Konsequenz steht indes noch aus.

Wir untersuchen ferner den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

gegeben, also gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Gleichung

$$(73) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0.$$

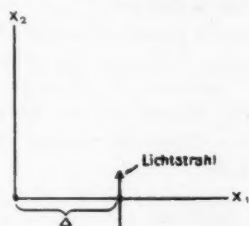
Ist die Richtung, d. h. das Verhältnis  $dx_1 : dx_2 : dx_3$  gegeben, so liefert die Gleichung (73) die Größen

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

und somit die Geschwindigkeit

$$V \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

im Sinne der Euklidischen Geometrie definiert. Man erkennt leicht, daß die Lichtstrahlen gekrümmt verlaufen müssen mit Bezug auf das Koordinatensystem, falls die  $g_{\mu\nu}$  nicht konstant sind. Ist  $n$  eine Richtung senkrecht zur Lichtfortpflanzung, so ergibt das Huggenssche Prinzip, daß der Lichtstrahl [in der Ebene  $(\gamma, n)$  betrachtet] die Krümmung  $-d\gamma/\partial n$  besitzt.



Wir untersuchen die Krümmung, welche ein Lichtstrahl erleidet, der im Abstand  $\Delta$  an einer Masse  $M$  vorbeigeht. Wählt man das Koordinatensystem gemäß der vorstehenden Skizze, so ist die gesamte Biegung  $B$  des Lichtstrahles (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Ursprung hin konkav ist) in genügender Näherung gegeben durch

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

während (73) und (70) ergeben

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\alpha}{2r} \left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Die Ausrechnung ergibt

$$(74) \quad B = \frac{2\alpha}{A} = \frac{\kappa M}{4\pi A}.$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von  $1,7''$ , ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa  $0,02''$ .

Berechnet man das Gravitationsfeld um eine Größenordnung genauer, und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den Kepler-Newtonschen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage

$$(75) \quad \varepsilon = 24 \pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^3 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet  $a$  die große Halbachse,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße,  $e$  die Exzentrizität,  $T$  die Umlaufszeit in Sekunden.<sup>1)</sup>

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um  $43''$  pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

1) Bezüglich der Rechnung verweise ich auf die Originalabhandlungen A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 47. p. 831. 1915. — K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 7. p. 189. 1916.

(Eingegangen 20. März 1916.)



## 2. Die Entropie fester Lösungen; von Otto Stern.

### Einleitung.

Die Frage, ob die Entropie von Lösungen dem Nernst'schen Theorem gehorcht und bei abnehmender Temperatur gegen Null konvergiert, ist sehr umstritten. Nernst u. a.<sup>1)</sup> bejahen sie, Einstein und Planck<sup>2)</sup> verneinen sie. Nach der Ansicht der letzten beiden Forscher ist beim absoluten Nullpunkt die Entropie  $S_0$  eines aus  $h$  Komponenten bestehenden Gemisches pro Mol gleich

$$R \sum_i^{1,h} x_i \ln \frac{1}{x_i}$$

( $R$  Gaskonstante,  $x_i$  Molenbruch der  $i$ -ten Komponente). Die Entropie  $S$  des Gemisches bei der Temperatur  $T$  würde demnach

$$S = S_0 + \int_0^T \frac{c}{T} dT$$

sein ( $c$  spezifische Wärme des Gemisches). Nach Nernst dagegen ist  $S_0 = 0$ , also

$$S = \int_0^T \frac{c}{T} dT.$$

Wir wollen zunächst die Schwierigkeiten, die diese Annahme mit sich bringt, darlegen und die zugunsten der Planck-Einsteinschen Auffassung sprechenden Gründe kurz erörtern. Am einfachsten gestaltet sich die Diskussion für den Fall eines Gemisches aus chemisch sehr ähnlichen Komponenten. Für ein solches gilt erfahrungsgemäß der Satz, daß der Partialdampfdruck einer jeden Komponente proportional ihrem

1) W. Nernst, Sitzber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1913 (972); W. H. Keesom, Phys. Zeitschr. 14. p. 665. 1913.

2) M. Planck, Thermodynamik. 4. Aufl. p. 279 ff. 1913; A. Einstein, Zweiter Brüsseler Solvaykongreß 1913.

Molenbruch ist. Um diesen Satz molekulartheoretisch zu verstehen, bedienen wir uns eines von Hrn. Einstein mehrfach angewandten Kunstgriffes, nämlich der Methode der gekennzeichneten Moleküle. Wir betrachten eine chemisch einheitliche kondensierte Phase (Flüssigkeit oder festen Stoff) im Gleichgewicht mit der dampfförmigen Phase und denken uns nun einen bestimmten Bruchteil der Moleküle, ohne ihre Eigenschaften sonst im geringsten zu verändern, irgendwie gekennzeichnet, z. B., grobsinnlich gesprochen, rot gefärbt. Dann ist es klar, daß im Gleichgewicht der Prozentsatz der roten Moleküle in der kondensierten und in der dampfförmigen Phase gleich sein wird, d. h. das obige Partialdampfdruckgesetz ist in diesem Falle, der den idealen Grenzfall eines Gemisches aus chemisch sehr ähnlichen Komponenten darstellt, erfüllt. Die Entropiezunahme, die beim isothermen Mischen der beiden Komponenten stattfindet, können wir mit Hilfe des Partialdampfdruckgesetzes leicht berechnen, indem wir die Mischung reversibel durch isotherme Destillation vornehmen.<sup>1)</sup> Da die Mischungswärme in diesem Fall gleich Null ist, ergibt sich die Entropieänderung zu

$$R \sum_i^{1,2} x_i \ln \frac{1}{x_i},$$

falls wir die Gültigkeit der idealen Gasgesetze für den Dampf voraussetzen. Diese Voraussetzung bleibt aber, da es sich um gesättigte Dämpfe handelt, bis zu den tiefsten Temperaturen herab gültig, und ebenso ist nicht einzusehen, weshalb die Überlegung mit den gekennzeichneten Molekülen, bei der ja von Temperatur gar nicht die Rede war, bei tiefen Temperaturen versagen sollte. Wir müssen daher annehmen, daß die Entropiezunahme beim Mischen der roten und der ungefärbten Moleküle auch für  $T = 0$  gleich

$$R \sum_i^{1,h} x_i \ln \frac{1}{x_i}$$

bleibt. Doch brauchen wir uns nicht auf diesen idealen Grenzfall zu beschränken. Das systematische Glied

$$R \sum_i^{1,h} x_i \ln \frac{1}{x_i}$$

1) Vgl. z. B. O. Sackur, Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik.



ist ja bei genügend hohen Temperaturen sicher auch in dem Ausdruck für die Entropie eines Gemisches von chemisch sehr verschiedenen Stoffen enthalten. Wäre nun nach Nernst  $S_0 = 0$ , so müßte dieses Glied durch die Integration über  $c/T$  entstehen. Das ist aber ausgeschlossen, falls man annimmt, daß die spezifische Wärme  $c$  eines Mischkristalls als Summe der spezifischen Wärmen seiner Eigenschwingungen nach der Planck-Einsteinschen Formel berechnet werden kann. Deshalb diese Überlegungen, die mir lange Zeit die stärksten Gründe gegen die Allgemeingültigkeit des Nernstschen Theorems zu sein schienen, doch in die Irre führen, und wie man auf wohl einwandfreie Weise die Entropie einer festen Lösung für beliebige Temperaturen bis zum absoluten Nullpunkt herab berechnen kann, soll im folgenden gezeigt werden.

#### Berechnung der Entropie einer festen Lösung.

Wir betrachten einen Mischkristall, eine feste Lösung, die aus  $(1-x)$  Molen  $= (1-x)N$  Molekülen des Stoffes  $A$  und aus  $x$  Molen  $= xN$  Molekülen des Stoffes  $B$  besteht. Wir wollen die Stoffe im folgenden als einatomig voraussetzen; doch geschieht dies nur, um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, da unsere Überlegungen, wie sich zeigen wird, ebenso für Moleküle gelten. Wir nehmen ferner an, daß die Atome im Mischkristall an raumgitterartig angeordnete Gleichgewichtslagen gebunden sind, und daß alle Atome ihre Plätze miteinander tauschen können, wozu prinzipiell jede noch so langsame Diffusion genügt. Die Entropie einer solchen Lösung könnte man bei hohen Temperaturen, im Gültigkeitsgebiete der klassischen Molekulartheorie, etwa folgendermaßen berechnen. Wir denken uns eine sehr große Zahl, z. B. ebenfalls  $N$ , von Exemplaren unseres Mischkristalls im Gleichgewicht mit einem großen Wärmebade. Dann werden in einem bestimmten Moment alle möglichen Zustände, die der Mischkristall überhaupt annehmen kann, unter diesen  $N$  Exemplaren vertreten sein, z. B. auch solche Zustände, die völliger Entmischung entsprechen. Als die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Zustandes bezeichnen wir seine prozentische Häufigkeit, d. h. die Zahl der in ihm befindlichen Exemplare, dividiert durch  $N$ . Wir hätten die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes übrigens auch auf solche Weise definieren können,

daß wir *einen* Mischkristall sehr lange Zeit hindurch beobachten und angeben, welchen Bruchteil dieser Zeit sich der Kristall in dem betreffenden Zustande aufhält. Die räumlich oder zeitlich definierte Wahrscheinlichkeit eines Zustandes hängt nun, wie die statistische Mechanik lehrt, nur von seiner Energie  $\varepsilon$  ab; sie ist bekanntlich proportional

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \left( k = \frac{R}{N} \right).$$

Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Zustände sind also bekannt, wenn ihre Energiedifferenzen gegeben sind, und die Entropie des Mischkristalls läßt sich dann nach den Regeln der statistischen Mechanik leicht aus diesen Wahrscheinlichkeiten berechnen. Leider versagt diese Methode aus bisher noch unbekannten Gründen bei tiefen Temperaturen, und die dann an ihre Stelle tretende Quantentheorie ermöglicht es zur Zeit noch nicht, das vorliegende Problem in einwandfreier Weise zu behandeln.

Aus dieser Schwierigkeit hilft uns im vorliegenden Falle eine von der üblichen abweichende Definition des Zustandes. Bei der üblichen, auch den obigen Ausführungen zugrunde liegenden, Zustandsdefinition wird ein bestimmter Zustand des Mischkristalls durch die Angabe der Lagen und Geschwindigkeiten sämtlicher Atome innerhalb bestimmter, sehr kleiner Grenzen charakterisiert. Das ist nun eine für unsere Zwecke viel zu eingehende Zustandsdefinition. Nehmen wir nämlich an, daß die Atome des Mischkristalls Schwingungen um raumgitterartig angeordnete Gleichgewichtslagen ausführen, so interessiert uns bei unserem Problem der Mischung hauptsächlich die Art der Verteilung der Atome *A* und *B* über diese Gleichgewichtslagen. Wir wollen daher festsetzen, daß ein bestimmter Zustand des Kristalls durch die Angabe dieser Verteilung vollständig definiert ist, wobei natürlich die Lagen und Geschwindigkeiten der einzelnen Atome in weiten Grenzen beliebig sind. Ferner wollen wir noch alle Zustände, die dadurch ineinander übergeführt werden können, daß Atome gleicher Art die Plätze tauschen, als identisch ansehen. Schließlich wird es im allgemeinen die Symmetrie des Kristalls mit sich bringen, daß immer je einer dieser Zustände durch Drehung ineinander übergeführt werden

können (die Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung des Kristalls würde eine minimale Korrektur bedingen). Auch solche Zustände betrachten wir als identisch. Nach diesen Festsetzungen ist die Zahl  $Z$  der möglichen Zustände des Mischkristalls gleich

$$\frac{N!}{(1-x)N! x N!} \cdot \frac{1}{r},$$

nämlich gleich der Zahl der verschiedenen Arten, auf die man die Atome über die  $N$  Gleichgewichtslagen des Raumgitters des Mischkristalls, dessen äußere Form als konstant angenommen wird, verteilen kann, dividiert durch  $r$ . Jeden dieser Zustände können wir nun — und das ist der Grund, weshalb wir den Zustand auf diese besondere Art und Weise definierten — als eine bestimmte chemische Verbindung der  $(1-x)N$  Atome des Stoffes  $A$  und der  $xN$  Atome des Stoffes  $B$  zu dem großen Molekül des Mischkristalls ansehen. Die neueren Untersuchungen über die Konstitution der Kristalle lassen keinen Zweifel zu, daß diese Auffassung durchaus dem Wesen der Sache entspricht. Es sind also die  $Z$  Zustände unseres Mischkristalls die  $Z$  Isomeren der chemischen Verbindung, von welcher der Mischkristall ein Molekül ist. Die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Zustände und die Entropie der Lösung zu berechnen, ist nunmehr, durch die besondere Art, das Problem zu formulieren, eine einfache Aufgabe aus der chemischen Gleichgewichtslehre geworden, die für beliebige Temperaturen rein thermodynamisch gelöst werden kann.

Die Ausführung gestaltet sich etwa folgendermaßen. Wir wählen als Wärmebad ein ideales Gas, in dem die  $N$  Exemplare des Mischkristalls, dem Einfluß der Schwerkraft entzogen, suspendiert sind. Das Volumen  $V$  des Gefäßes, in dem das ganze System enthalten ist, sei so groß, daß der durch die Brownsche Bewegung der Mischkristalle verursachte Druck auf die Wand des Gefäßes den idealen Gasgesetzen gehorcht. Wir bezeichnen mit  $n_i$  die Zahl der Mischkristalle im  $i$ -ten Zustande oder, mit anderen Worten, die Zahl der Moleküle des  $i$ -ten Isomeren im chemischen Gleichgewicht, mit

$$\xi_i = \frac{n_i}{N}$$

den Molenbruch des  $i$ -ten Isomeren. Das Isomere 1 entspreche dem ungemischten Zustande, den wir durch eine bestimmte

Form der Grenzfläche zwischen den reinen Komponenten charakterisiert annehmen. Wir denken uns nun an dem Gefäß  $Z$  halbdurchlässige Wände angebracht, deren jede für je ein Isomeres und das als Wärmebad dienende ideale Gas durchlässig ist und an ein durch einen Stempel verschlossenes Gefäß grenzt, welches das betreffende Isomere in der Gleichgewichtskonzentration enthält. Wir ziehen jetzt den Stempel des Ansatzgefäßes mit dem Isomeren  $i$  reversibel um das Volumen  $V$  heraus und stoßen gleichzeitig den Stempel des Ansatzgefäßes mit dem Isomeren 1 reversibel so weit hinein, daß  $n_i$  Moleküle aus dem Zustand 1 in den Zustand  $i$  überführt werden. Die hierbei aufgenommene Wärmemenge ist  $n_i (\varepsilon_i - \varepsilon_1)$ , falls  $\varepsilon_i$  die Energie des Mischkristalls im Zustande  $i$  bedeutet. Die durch den Prozeß bewirkte Entropiezunahme ist also

$$dS = \frac{n_i (\varepsilon_i - \varepsilon_1)}{T}.$$

Andererseits ist  $dS$  gleich der Entropiedifferenz zwischen den entstandenen und verschwundenen Stoffen, d. h. es ist

$$dS = \xi_i \left( R \ln \frac{V}{\xi_i} + 3 R \ln T + S_0^i - R \ln \frac{V}{\xi_1} - 3 R \ln T - S_0^1 \right) + n_i (\sigma_i - \sigma_1).$$

Hierin stellt die erste Klammer den von der fortschreitenden und drehenden Brownschen Bewegung der Kristalle herrührenden Anteil der Entropie dar, wie ihn die Gastheorie liefert, wobei  $S_0$  die sog. Entropiekonstante ist, während  $\sigma$  die Entropie der Atombewegungen im Kristall bedeutet, also das, was man gewöhnlich als die Entropie des Kristalls bezeichnet. Nun können wir alle  $S_0^i$  als gleich ansehen, da  $S_0$  in universeller Weise von der Masse und den Trägheitsmomenten des Kristalls abhängt.<sup>1)</sup> Die Massen sind aber für alle Isomeren gleich, und die geringen Verschiedenheiten der Trägheitsmomente können wir als für unser Problem unwesentlich vernachlässigen, da sie nur für die von der Brownschen Rotationsbewegung der Kristalle herrührenden Entropiedifferenzen maßgebend sind. Aus dem gleichen Grunde können wir auch

1) Vgl. O. Sackur, Ann. d. Phys. **40** p. 67. 1913; H. Tet ode, Ann. d. Phys. **38**. p. 414; **39**. p. 255. 1912; O. Stern, Phys. Zeitschr. **14**. p. 629. 1913.

die bei außerordentlich tiefen Temperaturen auftretenden Quantenabweichungen dieser enorm großen Moleküle vernachlässigen. Somit wird

$$dS = \frac{n_i(\varepsilon_i - \varepsilon_1)}{T} = n_i k \ln \frac{\xi_i}{\xi_1} + n_i(\sigma_i - \sigma_1).$$

Bezeichnen wir mit  $f_i = \varepsilon_i - \sigma_i T$  die freie Energie eines Isomerenmoleküls, d. h. eines Mischkristalls in einem bestimmten Zustande, so haben wir:

$$k \ln \frac{n_i}{n_1} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_1}{T} - (\sigma_i - \sigma_1) = \frac{f_i - f_1}{T}.$$

Also ist

$$(1) \quad n_i = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{f_i}{kT}}.$$

Wir haben somit die Wahrscheinlichkeit  $w_i = n_i/N = \xi_i$  des  $i$ -ten Zustandes berechnet. Wir hätten dieses Resultat für hohe Temperaturen auch mit Hilfe der klassischen Molekulartheorie ableiten können; aber die hier benutzte Methode hat den Vorzug, daß sie ein für beliebige Temperaturen streng gültiges Resultat liefert. Führen wir nun den oben beschriebenen Prozeß mit jedem der Isomere 2 bis  $Z$ , also  $(Z-1)$  mal aus und trennen auch von dem das Isomere 1 enthaltenden Gefäß das Volumen  $V$  ab, so erhalten wir von jedem Isomeren  $n_i$  Moleküle im Volumen  $V$ . Die dadurch bewirkte Entropiezunahme ist gleich

$$\sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_i} + \sigma_i \right) - \sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_1} + \sigma_1 \right).$$

Indem wir schließlich alle Isomeren in demselben Volumen  $V$  vereinigen, wobei keine Entropieänderung auftritt, haben wir

$$\sum_i^{1,Z} n_i = N$$

Mischkristalle aus dem ungemischten in den gemischten Zustand übergeführt. Dabei waren aber die  $N$  Mischkristalle 1 in dem ihrer Gleichgewichtskonzentration  $\xi_1/V$  entsprechenden Volumen  $V/\xi_1$  enthalten. Verwandle ich also bei gleichbleibendem Volumen  $N$  Mischkristalle, deren jeder die beiden Komponenten  $A$  und  $B$  in reinem Zustande enthält, in  $N$  Mischkristalle, deren jeder die feste Lösung der beiden Komponenten  $A$  und  $B$  darstellt, so ist die Entropiezunahme um  $R \ln 1/\xi_1$  größer, also gleich:

$$\begin{aligned}
 & R \ln \frac{1}{\xi_1} + \sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_i} + \sigma_i \right) - \sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_1} + \sigma_1 \right) \\
 &= R \ln \frac{1}{\xi_1} + \sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_i} + \sigma_i \right) - N \left( k \ln \frac{1}{\xi_1} + \sigma_1 \right) \\
 &= \sum_i^{1,Z} n_i \left( k \ln \frac{1}{\xi_i} + \sigma_i \right) - N \sigma_1.
 \end{aligned}$$

Andererseits ist diese Entropiezunahme, wenn ich mit  $\sigma^*$  die Entropie der festen Lösung bezeichne, gleich  $N \sigma^* - N \sigma_1$ . Daher ist

$$\sigma^* = \sum_i^{1,Z} \frac{n_i}{N} \left( k \ln \frac{1}{\xi_i} + \sigma_i \right) = \frac{\sum_i^{1,Z} n_i \sigma_i}{N} + \sum_i^{1,Z} \xi_i k \ln \frac{1}{\xi_i} = \bar{\sigma} + k \sum_i^{1,Z} \xi_i \ln \frac{1}{\xi_i},$$

falls wir mit  $\bar{\sigma} = \frac{\sum_i^{1,Z} n_i \sigma_i}{N}$  eine mittlere Entropie der Isomeren bezeichnen. In analoger Weise soll im folgenden für jede Größe  $g$  ihr Wert für die Lösung mit  $g^*$ , für das  $i$ -te Isomere

mit  $g_i$  und ihr durch die Gleichung  $\frac{\sum_i^{1,Z} n_i g_i}{N} = \bar{g}$  definierter Mittelwert mit  $\bar{g}$  bezeichnet werden. Setzen wir für  $n_i$  den oben berechneten Wert konst.  $e^{-\frac{f_i}{kT}}$  ein, so wird

$$\bar{g} = \sum_i^{1,Z} \xi_i g_i = \sum_i^{1,Z} \frac{n_i}{N} g_i = \frac{\sum_i^{1,Z} g_i e^{-\frac{f_i}{kT}}}{\sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}}},$$

und für die Entropie  $\sigma^*$ , die Energie  $\varepsilon^*$ , die freie Energie  $\mu^*$  und die spezifische Wärme  $c^*$  der Lösung ergeben sich folgende Werte:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma^* &= \bar{\sigma} + \sum_i^{1,Z} \xi_i \ln \frac{1}{\xi_i} = \bar{\sigma} + k \sum_i^{1,Z} \xi_i \ln \frac{\sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}}}{\xi_i e^{-\frac{f_i}{kT}}} \\ &= \bar{\sigma} + k \sum_i^{1,Z} \xi_i \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}} + k \sum_i^{1,Z} \xi_i \frac{f_i}{kT} \\ &= \bar{\sigma} + k \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}} + \frac{\bar{f}}{T} = \frac{\bar{\varepsilon}}{T} + k \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}}. \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \varepsilon^* = \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i^{1,Z} \varepsilon_i e^{-\frac{f_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{f_i}{kT}}}.$$

$$(4) \quad f^* = \varepsilon^* - \sigma^* T = -kT \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}}.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} c^* &= \frac{d\varepsilon^*}{dT} = \frac{d \sum_i^{1,Z} \varepsilon_i \xi_i}{dT} = \sum_i^{1,Z} \xi_i \frac{d\varepsilon_i}{dT} + \sum_i^{1,Z} \varepsilon_i \frac{d\xi_i}{dT} = \sum_i^{1,Z} c_i \xi_i \\ &\quad + \sum_i^{1,Z} \varepsilon_i \frac{d}{dT} \left( \frac{e^{-\frac{f_i}{kT}}}{\sum_i^{1,Z} e^{-\frac{f_i}{kT}}} \right) \\ &= \bar{c} + \frac{1}{kT^2} (\bar{\varepsilon}_i^2 - \bar{\varepsilon}_i^3). \end{aligned} \right.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Wir können vermittelst der obigen Formeln Entropie und Energie der Lösung berechnen, wenn uns diese Größen für jedes Isomere, das einen möglichen Zustand der Lösung darstellt, gegeben sind. Am einfachsten ist, wie man sieht, der Ausdruck für  $f^*$ , den wir daher meist der Diskussion zugrunde legen werden. Ferner werden wir im folgenden, falls eine Spezialisierung nötig ist, annehmen, daß man den temperaturabhängigen Anteil von  $f_i$  mit Hilfe der Planckschen Formel durch eine Summe über die  $3N$  Eigenschwingungen des betreffenden Isomeren darstellen kann.

#### Grenzwerte für hohe Temperaturen.

Wir wollen zunächst zeigen, daß unsere Theorie für hohe Temperaturen die bekannten Grenzesetze für verdünnte Lösungen und für Gemische chemisch ähnlicher Stoffe liefert. Im letzteren Falle kann man annehmen, daß sich alle  $f_i$  nur um kleine Beträge  $\delta$  voneinander unterscheiden. Wir setzen  $f_i = \bar{f} + \delta_i$ . Dann wird

$$\begin{aligned} f^* &= -kT \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{\bar{f} + \delta_i}{kT}} = -kT \ln \left( e^{-\frac{\bar{f}}{kT}} \cdot \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{\delta_i}{kT}} \right) \\ &= \bar{f} - kT \ln \sum_i^{1,Z} e^{-\frac{\delta_i}{kT}} = \bar{f} - kT \ln Z, \end{aligned}$$

da mit wachsendem  $T$  der Ausdruck  $\delta_i/kT$  gegen Null,  $e^{-\frac{\delta_i}{kT}}$  also gegen den Wert Eins konvergiert. Nun ist

$$Z = \frac{N!}{(1-x)N! x N!} \frac{1}{r},$$

also wird bei Anwendung der Stirlingschen Approximation und Vernachlässigung von  $\ln r$

$$\ln Z = -(1-x)N \ln(1-x) - xN \ln x$$

und

$$kT \ln Z = RT \left[ (1-x) \ln \frac{1}{1-x} + x \ln \frac{1}{x} \right],$$

in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Theorie. Für den Grenzfall der gekennzeichneten Moleküle sind alle  $f_i$  gleich, und die Entropieänderung beim Mischen ergibt sich wie in der Einleitung für alle Temperaturen zu

$$R \sum_i^{1,2} x_i \ln \frac{1}{x_i}.$$

Auch für den Fall, daß die eine Komponente, z. B.  $B$ , nur in geringer Menge vorhanden ist, kann man durch die üblichen Überlegungen ableiten, daß  $f_i$  für die überwiegende Mehrzahl der Isomeren gleich, und zwar gleich  $(1-x)f_A + xf_B'$  ist ( $f_A$  freie Energie von reinem  $A$ ,  $f_B'$  von  $B$  in der Lösung). Dann wird

$$f^* = (1-x)f_A + xf_B' - kT \ln Z = (1-x)f_A + xf_B' - RT \left[ (1-x) \ln \frac{1}{1-x} + x \ln \frac{1}{x} \right],$$

wie in der van't Hoff'schen Theorie.

#### Grenzwert für $T = 0$ . Nernstsches Theorem und Nullpunktsenergie.

Für die Diskussion der Grenzwerte, denen  $\sigma^*$ ,  $\varepsilon^*$  und  $f^*$  für den limes  $T = 0$  zustreben, sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob ein Isomeres eine kleinere freie Energie als alle übrigen besitzt (Fall a), oder ob mehrere Isomere die gleiche freie Energie, und zwar wiederum eine kleinere als alle übrigen besitzen (Fall b).

Wir behandeln zunächst Fall a. Dabei bezeichnen wir  $\lim_{T \rightarrow 0} f_i$  mit  $f_i^0$  und das kleinste  $f_i^0$  mit  $f_m^0$ . Man sieht nun leicht ein, daß für  $T = 0$  die Wahrscheinlichkeit aller Isomeren gegenüber der des  $m$ -ten verschwindet, während dieses die Wahrscheinlichkeit 1 besitzt und allein vorhanden ist. Denn es ist:



$$w_m = \xi_m = \frac{n_m}{\sum_i n_i} = \frac{e^{-\frac{f_m}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{f_i}{kT}}}$$

Nun ist aber

$$\lim_{T=0} \sum_i e^{-\frac{f_i}{kT}} = e^{-\frac{f_m^0}{kT}}$$

Setzen wir nämlich  $f_i^0 = f_m^0 + \delta_i^0$ , wobei alle  $\delta_i^0$  nach Voraussetzung positive und endliche Größen sind und nur  $\delta_m^0 = 0$  ist, so wird

$$\lim_{T=0} \sum_i e^{-\frac{f_i}{kT}} = e^{-\frac{f_m^0}{kT}} \cdot \sum_i e^{-\frac{\delta_i^0}{kT}} = e^{-\frac{f_m^0}{kT}},$$

weil für  $T = 0$   $\frac{\delta_i^0}{kT} = \infty$  also  $e^{-\frac{\delta_i^0}{kT}} = 0$  wird außer für  $i = m$ ,

in welchem Falle  $\frac{\delta_m^0}{kT} = 0$  also  $e^{-\frac{\delta_m^0}{kT}} = 1$  wird. Daher ist

$$\lim_{T=0} w_m = \frac{e^{-\frac{f_m^0}{kT}}}{e^{-\frac{f_m^0}{kT}}} = 1,$$

wie behauptet. Es ist das nichts anderes als die aus der chemischen Gleichgewichtslehre längst bekannte Tatsache, daß beim absoluten Nullpunkt das Gleichgewicht vollständig nach der Seite der Verbindung mit der kleinsten freien Energie verschoben ist. Es sei noch bemerkt, daß dieses Isomere natürlich auch das den ungemischten Zustand repräsentierende, also  $m = 1$  sein kann. Aus dem Vorhergehenden folgt für den Limes  $T = 0$ :

$$\sigma^* = \sigma_m, \quad \epsilon^* = \epsilon_m, \quad f^* = f_m,$$

und die Entropiezunahme beim Mischen wird für den absoluten Nullpunkt:

$$\sigma^* - \sigma_1 = \sigma_m - \sigma_1,$$

d. h. gleich der Entropieänderung bei der chemischen Umwandlung eines Moleküls in ein mit ihm isomeres Molekül. Das Nernstsche Theorem gilt also im Falle *a* für Lösungen, falls es für diese Art chemischer Reaktionen gilt. Diese Voraussetzungen können wir in unserem Falle wohl unbedenklich machen, denn die in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> von mir ge-

1) Ann. d. Phys. 44. p. 497. 1914.

äußerten Bedenken gegen die Gültigkeit des Nernstschen Theorems für chemische Reaktionen bezogen sich nur auf den Fall, daß Atome aus dem Zustande chemischer Bindung in den freien Zustand übergehen, was hier nicht der Fall ist. Es scheint aber überhaupt, als ob die in der erwähnten Arbeit festgestellte Diskrepanz des Nernstschen Theorems mit der Erfahrung durch unerwartete Fehler des Experiments<sup>1)</sup> bedingt ist, so daß wir die Gültigkeit des Nernstschen Theorems jedenfalls für alle Arten chemischer Reaktionen annehmen können. Es sei hierzu auch auf die weiter unten durchgeführte Diskussion über die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes hingewiesen. Wir können also setzen:  $\sigma^* - \sigma_1 = 0$ , d. h. im Falle *a* gilt das Nernstsche Theorem für Lösungen.

Dies trifft nicht zu für den Fall *b*. Haben nämlich mehrere (etwa  $Z_0$ ) Isomere die gleiche minimale freie Energie  $f_m^0$ , so kann man in gleicher Weise wie oben zeigen, daß für  $\lim T = 0$  jedes von ihnen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, während die Wahrscheinlichkeit aller übrigen gleich Null wird. Es wird dann für  $\lim T = 0$ :

$$f^* = f_m^0 - kT \ln Z_0, \quad \varepsilon^* = \bar{\varepsilon} = \varepsilon_m^0, \quad \sigma^* = \sigma_m^0 + k \ln Z_0,$$

und die Entropieänderung beim Mischen wird für  $T = 0$ :

$$\sigma^* - \sigma_1 = \sigma_m^0 - \sigma_1 + k \ln Z_0 = k \ln Z_0,$$

d. h. im Falle *b* gilt das Nernstsche Theorem *nicht* für Lösungen, selbst wenn es für chemische Reaktionen gilt. Seine Gültigkeit hängt also davon ab, ob Fall *b* möglich ist. Diese Frage wollen wir jetzt näher untersuchen.

Zunächst können wir noch eine Vereinfachung vornehmen, indem wir

$$\lim_{T=0} \sigma_i T = 0$$

setzen, so daß  $f_i^0 = \varepsilon_i^0$  wird. Die Frage ist nun, ob von allen möglichen Anordnungen, die man durch Verteilung der  $(1-x)N$  Atome *A* und  $xN$  Atome *B* über die  $N$  raumgitterartig angeordneten Gleichgewichtslagen des Kristalls herstellen kann, nur eine die kleinste Energie besitzt. Das ist sicher dann der Fall, wenn alle Anordnungen beim absoluten Nullpunkt ver-

1) Nach einer freundlichen persönlichen Mitteilung von Herrn Geheimrat Nernst hat es sich gezeigt, daß u. a. die spezifische Wärme des festen Jods merklich durch die Wärmetönung einer Umwandlung, der es bei tiefen Temperaturen unterliegt, gefälscht ist.

schiedene Energie haben, wofür wir im folgenden Gründe beizubringen versuchen werden. Das ist natürlich nicht möglich, ohne Hypothesen über die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte zu machen. Es möge daher von vornherein der — im Gegensatz zu dem Vorangegangenen — hypothetische Charakter der folgenden Erörterungen betont werden. Zunächst wollen wir voraussetzen, daß die chemische Verschiedenheit der Stoffe *A* und *B* auch eine Verschiedenheit der zwischen den Atomen gleicher und verschiedener Art wirksamen Kräfte bedingt. Es könnte nun plausibel scheinen, anzunehmen, daß unter dieser Voraussetzung verschiedenen Konfigurationen auch stets verschiedene potentielle Energien zukommen. Das ist aber nicht richtig. Denn wenn wir die — nach allem, was wir wissen, der Wirklichkeit sehr nahe kommende — Hypothese machen, daß immer nur die unmittelbar benachbarten Atome aufeinander wirken, so sieht man ohne weiteres, daß besonders bei verdünnten Lösungen sehr viele Konfigurationen — z. B. alle, bei denen jedes gelöste Atom vollständig von Lösungsmittelatomen umgeben ist, — die gleiche potentielle Energie haben werden. Man muß dann für den Fall, daß beim Mischen Wärme frei wird — anderenfalls hat der ungemischte Zustand die kleinste Energie —, annehmen, daß für  $T = 0$  viele Konfigurationen mit der gleichen kleinsten Energie vorhanden sind. Doch liegt die Sache noch ungünstiger, weil die obige Voraussetzung, daß chemische Verschiedenheit auch Verschiedenheit der Atomkräfte bedingt, nicht in allen Fällen zuzutreffen braucht. Man muß vielmehr annehmen, daß zwei Stoffe *A* und *B* auch dann chemisch verschieden sind, wenn die von ihren Atomen ausgehenden Kräfte genau gleich und nur die Massen der Atome verschieden sind, weil man solche Stoffe z. B. durch Schwerewirkung oder Zentrifugieren reversibel trennen kann. Nach den neueren Anschauungen der auf dem Gebiete der Radiochemie arbeitenden Forscher sind bekanntlich die sogenannten Isotopen mit außerordentlicher Annäherung als solche Stoffe zu betrachten.<sup>1)</sup> In diesem Falle besitzen nun überhaupt alle möglichen Anordnungen die gleiche potentielle Energie. Gegen diese Erwägungen könnte man einwenden, daß eben in der Wirklichkeit unsere

1) S. z. B. K. Fajans, Die Naturwissenschaften 1914. p. 429 u. 463.

Voraussetzungen nie streng erfüllt, daß also prinzipiell auch die entferntesten Atome im Kristall Wirkungen, wenn auch außerordentlich geringe, aufeinander ausüben, und daß die von Atomen mit verschiedener Masse ausgehenden Kräfte prinzipiell geringe Verschiedenheiten aufweisen. Für die Gravitationswirkung ist das ja sicher der Fall; aber auch für die von isotopen Atomen ausgehenden chemischen Kräfte resultieren, falls man der Theorie des Rutherfordsche Atommodell zugrunde legt, ganz geringe Verschiedenheiten, wie K. Fajans<sup>1)</sup> kürzlich gezeigt hat. Mit Hilfe derartiger Überlegungen ließe sich das Nernstsche Theorem wohl auf jeden Fall aufrecht erhalten. In viel natürlicherer Weise geschieht dies jedoch meines Erachtens durch Einführung der Nullpunktsenergie, wodurch, wenn ich so sagen darf, das Nernstsche Theorem mit der richtigen Größenordnung gültig wird. Es sind nämlich für einen Mischkristall, der ein Mol einer festen Lösung zweier Isotopen darstellt, infolge der Verschiedenheit der Massen bei Gleichheit der Kräfte die  $3N$  Eigenschwingungen des Systems für verschiedene Konfigurationen verschieden, und es wird daher jedenfalls auch die Summe ihrer Eigenfrequenzen

$$\sum_i^{1,3N} \nu_i^e$$

( $\nu_i^e$  ist die  $i$ -te Eigenschwingung des  $i$ -ten Isomeren) verschieden sein. Dann wird auch die Nullpunktsenergie vom Betrage

$$\frac{h}{2} \sum_i^{1,3N} \nu_i^e$$

der Konfigurationen verschieden, und beim absoluten Nullpunkt wird das Isomere, für das

$$\sum_i^{1,3N} \nu_i^e$$

ein Minimum ist, die Wahrscheinlichkeit Eins haben. Ebenso verursacht die Nullpunktsenergie eine Verschiedenheit der  $\epsilon_i^0$  für den oben erwähnten Fall der verdünnten Lösungen. Natürlich müßten diese hier aufgestellten Behauptungen durch explizite Berechnung, auf die ich in einer folgenden Arbeit,

1) K. Fajans, Elster u. Geitel-Festschrift, p. 623. 1915.

die auch die Behandlung einfacher Spezialfälle auf Grund der hier entwickelten Theorie bringen soll, eingehen zu können hoffe, nachgewiesen werden; doch ist ihre Richtigkeit wohl auch ohne dies ersichtlich. Nur in einem Fall ist die Energie verschiedener Anordnungen sicher gleich, wenn es sich nämlich um zwei spiegelbildlich gleiche Konfigurationen handelt. Wäre ihre Energie zugleich kleiner als die aller übrigen Isomeren, so besäßen sie beide beim absoluten Nullpunkt die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich  $\frac{1}{2}$ , und die Entropie der Lösung würde für  $T = 0$  nicht gegen Null, sondern gegen den Wert

$$k \ln 2 = R \frac{\ln 2}{N}$$

konvergieren, wodurch ein prinzipieller Widerspruch gegen das Nernstsche Theorem bedingt wäre. Ich glaube aber, daß dieser Widerspruch durch quantentheoretische Betrachtungen behoben werden kann, doch bin ich nicht imstande, dies durch die in dieser und in meinen früheren Arbeiten angewandten Methoden zu beweisen. Hier möchte ich noch die Bemerkung anschließen, daß die obigen Überlegungen auch für Gemische optisch-aktiver Isomeren gelten, da auch bei diesen den verschiedenen Anordnungen der Stoffe verschiedene  $\epsilon_i^0$  entsprechen, wie man durch Betrachtung der Atomgitter statt der Molekülgitter einsieht.

Es mögen nun noch die in der Einleitung angeführten Argumente, welche die Möglichkeit, das Nernstsche Theorem für Lösungen aufrecht zu erhalten, auszuschließen schienen, auf Grund unseres jetzigen Standpunktes kurz besprochen werden.

Die Überlegung mit den gekennzeichneten Molekülen ist dahin zu modifizieren, daß solche Moleküle auch bezüglich der vom Nernstschen Theorem geforderten Abweichungen von der klassischen Theorie der Lösungen einen Grenzfall darstellen, indem diese Abweichungen erst bei um so tieferen Temperaturen auftreten, je ähnlicher die Moleküle sind. Die Überlegung gilt also beim absoluten Nullpunkt nur für solche Moleküle, die genau gleiche Masse haben und von denen genau gleiche Kräfte ausgehen. Solche Stoffe kann man aber nicht mehr als chemisch verschieden ansehen, weil sie nicht auf reversible Weise getrennt werden können.

Der zweite Einwand, daß das Glied

$$\sum_i^{1,h} x_i \ln \frac{1}{x_i}$$

durch Integration über  $c/T$  nicht entstehen kann, falls  $c$  als Summe der spezifischen Wärmen der Eigenschwingungen des Mischkristalls berechenbar ist, erledigt sich durch den Hinweis auf die oben abgeleitete Formel (5) für die spezifische Wärme der Lösung

$$c^* = \bar{c} + \sum_i^{1,Z} \epsilon_i \frac{d \xi_i}{dT},$$

die zeigt, daß  $c^*$  nicht als solche Summe darstellbar ist, sondern daß zu  $c^*$  die Umwandlungswärmen der Isomeren, deren Einfluß das zweite Glied darstellt, wesentlich beitragen. An dieser Stelle möge auch auf den einzigen meines Wissens bisher vorliegenden Ansatz zu einer Theorie der festen Lösungen auf Grund des Nernstschen Theorems wenigstens für sehr tiefe Temperaturen hingewiesen werden. Herr Nernst<sup>1)</sup> hat nämlich für den osmotischen Druck  $P$  einer festen Lösung das Grenzgesetz  $P = a + \beta T^4$  ( $a$  und  $\beta$  sind spezifische Konstanten) versuchsweise für den Fall aufgestellt, daß bei sehr tiefen Temperaturen, bei denen die Entropie der Lösung schon stark degeneriert ist, ihre spezifische Wärme dem Debyeschen Grenzgesetz folgen würde. Ob das in diesem Temperaturgebiet überhaupt möglich ist oder sogar bei genügend tiefer Temperatur allgemein eintritt, könnte erst eine eingehendere Rechnung zeigen. Nur so viel ist sicher, daß umgekehrt bei einem Gemisch aus chemisch und an Masse sehr ähnlichen Komponenten der Fall eintreten wird, daß die spezifische Wärme der Lösung bereits proportional  $T^3$  ist, während der osmotische Druck sich noch vollständig normal verhält, weil auch das systematische Glied

$$\sum_i^{1,h} x_i \ln \frac{1}{x_i}$$

in der Entropie noch vorhanden ist. Sein vom Nernstschen Theorem gefordertes Kleinerwerden erfolgt erst bei ganz tiefen

1) W. Nernst. l. c.

Temperaturen gerade dadurch, daß das Debyesche Grenzgesetz ungültig wird. Es wird dann bei noch tieferen Temperaturen wieder gültig, bei denen die Lösung nahezu in eine reine chemische Verbindung, das Isomere mit der kleinsten Energie, übergegangen ist. Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, daß man bei experimenteller Untersuchung eines bestimmten Mischkristalls bei genügend tiefen Temperaturen natürlich stets das Debyesche Grenzgesetz bestätigt finden würde, weil man infolge der außerordentlichen Langsamkeit der Diffusion (= der außerordentlich geringen Reaktionsgeschwindigkeit der Isomerenumwandlungen) bei tiefen Temperaturen keine Lösung, sondern nur ein bestimmtes Isomere vor sich hätte.

Zusammenfassend läßt sich über die Bedeutung unserer Resultate etwa folgendes sagen: Es soll und kann nicht behauptet werden, daß es hier gelungen wäre, die Gültigkeit des Nernstschen Theorems für Lösungen streng zu beweisen. Dagegen glaube ich, in einwandfreier Weise die Bedingung für diese Gültigkeit aufgezeigt und ihr prinzipielles Erfülltsein in der Wirklichkeit zum mindesten als wahrscheinlich nachgewiesen zu haben. Es besteht also durchaus die Möglichkeit, das Nernstsche Theorem auch für Lösungen aufrecht zu erhalten, was bisher nicht der Fall zu sein schien.<sup>1)</sup>

Da nun aber das Nernstsche Theorem, wie mehrfach betont wurde, seiner ganzen Art nach ein Satz ist, dessen wesentliche Bedeutung auf seiner *allgemeinen* Gültigkeit beruht, weshalb er ja auch oft als dritter Hauptsatz der Wärmetheorie bezeichnet wird, so würde ihm durch den Nachweis seiner Ungültigkeit auch nur in einem einzigen Falle, nämlich dem der Lösungen, ein großer Teil seines Wertes genommen und seine Gültigkeit auch für andere Fälle in Frage gestellt werden. Andererseits besitzt das Nernstsche Theorem, das eine große Menge experimentell sowie

1) Bezeichnend dafür ist auch, daß — bis auf die oben besprochene Annahme — noch kein Versuch gemacht worden ist, eine Theorie der Lösungen auf Grund des Nernstschen Theorems zu entwickeln, obwohl es doch besonders denjenigen Forschern, die sogar eine Entartung der idealen Gase bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt annehmen, nahegelegen hätte, etwas Analoges für die Lösungen anzunehmen. Ich glaube übrigens, daß es gelingen wird, die Theorie der idealen Gase nach einer ähnlichen Methode, wie sie hier benutzt wurde, zu behandeln.

theoretisch gefundener Tatsachen und Gesetze einheitlich abzuleiten gestattet und selbst aus dem Prinzip von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes gefolgert werden kann, eine derartig hohe innere Wahrscheinlichkeit für sich, daß ich fast sagen möchte, es genügt, die Möglichkeit seiner allgemeinen Gültigkeit nachgewiesen zu haben, um sicher zu sein, daß es wirklich allgemein gilt. Daher möchte ich auch die Erörterungen über die Rolle der Nullpunktsenergie nicht etwa als eine Ableitung des Nernstschen Theorems mit Hilfe der Hypothese der Nullpunktsenergie, sondern viel eher als Stütze für diese Hypothese aufgefaßt wissen. Jedenfalls besteht zwischen diesen beiden Dingen ein enger Zusammenhang, der auch an manchen anderen Stellen, z. B. in der Theorie des Magnetismus, zutage tritt. Zum Schluß sei noch besonders betont, daß die im letzten Abschnitt behandelten Fragen natürlich nichts mit der Ableitung unserer Formeln (1) bis (5) zu tun haben, die rein mit Hilfe der klassischen chemischen Gleichgewichtslehre begründet sind.

#### **Zusammenfassung.**

In der vorliegenden Arbeit wurde die allgemeine Theorie der festen Lösungen auf Grund folgender Annahmen entwickelt. In einem Mischkristall sind die Moleküle der Komponenten an raumgitterartig angeordnete Gleichgewichtslagen gebunden. Durch Diffusion können die Moleküle ihre Plätze tauschen. Man erhält alle möglichen Zustände des Mischkristalls, indem man die Moleküle verschiedener Art auf alle möglichen Weisen über die Gitterpunkte verteilt. Jeder dieser Zustände stellt eine bestimmte chemische Verbindung dar, die mit allen übrigen Zuständen isomer ist. Der Mischkristall in einem bestimmten Zustande ist also ein Molekül der durch diesen Zustand repräsentierten chemischen Verbindung. Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Zustandes und die Entropie der Lösung werden dann mit Hilfe der chemischen Gleichgewichtslehre berechnet, woraus sich auch die allgemeinen Formeln für die Energie, freie Energie und spezifische Wärme der Lösung ergeben. Der Grenzwert des so erhaltenen Ausdrucks für die Entropie der Lösung wird für hohe Temperaturen mit dem aus der klassischen Theorie erhaltenen iden-



tisch; für den limes  $T = 0$  wird er gleich Null, falls nur ein Zustand beim absoluten Nullpunkt eine kleinere Energie als alle übrigen besitzt. Dies ist also die Bedingung für die Gültigkeit des Nernstschen Theorems für Lösungen. Es wird gezeigt, daß diese Bedingung in ungezwungener und natürlicher Weise erfüllt ist, wenn man die Annahme einer von der Frequenz abhängigen Nullpunktsenergie macht. Die Bedeutung dieser Resultate für die Frage nach der Allgemeingültigkeit des Nernstschen Theorems wird diskutiert.

Lomsha (Russisch-Polen), Januar 1916.

(Eingegangen 10. Februar 1916.)

### 3. Die elektrodynamische Spaltung der Serienlinien des Wasserstoffs; von W. Wien.

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Würzburg.)

(Hierzu Tafel V.)

Bald nach der Entdeckung der elektrischen Aufspaltung der Wasserstofflinien durch Stark<sup>1)</sup> hatte ich<sup>2)</sup> aus der elektromagnetischen Theorie die Folgerung gezogen, daß diese Wirkung auch im magnetischen Felde eintreten müsse, wenn leuchtende Teilchen in ihm mit genügend großer Geschwindigkeit bewegt werden. Da nämlich die elektrische Kraft sich allgemein aus zwei Teilen zusammensetzt nach der Gleichung

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c} (\mathfrak{E} + [\mathfrak{v} \mathfrak{H}]),$$

wo  $\mathfrak{E}$  die elektrostatische,  $\mathfrak{H}$  die magnetische Kraft, beide im elektromagnetischen Meßsystem gemessen,  $\mathfrak{v}$  die Bewegungsgeschwindigkeit,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen, so kann  $\mathfrak{E}$  durch  $[\mathfrak{v} \mathfrak{H}]$  ersetzt werden, wenn es gelingt, diese Kraft genügend groß zu machen. Wenn  $\mathfrak{E}$  in Volt/cm gemessen wird, erhält man den Faktor  $10^8$ , so daß bei einem Werte von  $v = 10^8$  cm/sec dieselbe Wirkung erzielt werden muß, wenn  $\mathfrak{H}$  ebenso groß, in Gauss gemessen, ist wie  $\mathfrak{E}$  in Volt/cm gemessen.

Die Geschwindigkeit  $10^8$  cm/sec läßt sich bei Wasserstoffkanalstrahlen annähernd erreichen, und so macht es keine Schwierigkeit, durch die Bewegung der Kanalstrahlen im magnetischen Felde Kräfte zu erhalten, wie sie bei den ersten Stark'schen Untersuchungen angewendet worden sind. Da indessen die Kanalstrahlen Strahlen verschiedener Geschwindigkeit enthalten, so erhält man keine scharfen Linien

1) J. Stark, Berl. Ber. 20. November 1913.

2) W. Wien, Berl. Ber. 22. Januar 1914.

durch die magnetische Einwirkung, so daß sich die einzelnen bei nicht sehr großer Trennung überdecken und nur eine erhebliche Verbreiterung der ursprünglichen Linien erkennen lassen.

Bei der ersten experimentellen Prüfung wurde ein Elektromagnet der alten Ruhmkorffschen Konstruktion benutzt. Einer der Magnetpole war durchbohrt, um das Licht der Kanalstrahlen hindurchzulassen. Die Kanalstrahlen traten nach dem Verlassen der Kathode der im Eisenschutze befindlichen Röhre in eine Glasröhre von 6 mm Durchmesser, die sich horizontal zwischen den Polen des Magneten befand. Der Strom wurde von einer 20plattigen Influenzmaschine geliefert. Das Magnetfeld wurde durch eine kleine Spule von 2 mm Durchmesser, deren Windungsfläche in einem Felde von bekannter Stärke bestimmt war, gemessen. Da Magnetfeld und Kanalstrahlen horizontal verliefen, war die Richtung der Kraft  $[\mathfrak{v} \mathfrak{S}]$  senkrecht. Das Licht der Kanalstrahlen fiel, nachdem es durch die Durchbohrung des Magneten gegangen war, auf eine Kalkspatplatte von 3,5 cm Dicke und wurde hier in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine vertikal, der andere horizontal polarisiert war. Er fiel dann auf eine Kondensorlinse, die zwei reelle senkrecht zueinander polarisierte Bilder des von der Magnetdurchbohrung ausgeblendeten Kanalstrahlenstückes auf den Spalt des Steinheilschen Spektrographen warf. Die Entfernung der Kondensorlinse von den Kanalstrahlen betrug 66 cm, die Linse selbst hatte 2,5 cm Durchmesser. Die äußersten die Linse treffenden Strahlen bildeten daher einen Winkel mit der Bewegungsrichtung der Kanalstrahlen, dessen Cotangente  $1,25/66$  war. Die Dopplerverschiebung kann demnach bei den Beobachtungen nicht in Betracht kommen. Der Spektrograph polarisiert selbst das Licht durch Reflexion an den Prismen in erheblichem Maße senkrecht zur horizontalen Einfallsebene, schwächt daher die senkrecht zu  $[\mathfrak{S} \mathfrak{v}]$  polarisierten Strahlen.

Daher sind die am meisten verschobenen Linien bei der Zerlegung stärker geschwächt. Dadurch wurde die Sicherheit gewonnen, daß die beobachtete Linienverbreiterung nicht von einer photographischen Wirkung herrührte.

Die Geschwindigkeit  $v$  der Kanalstrahlen wurde durch die Dopplerverschiebung gemessen, und zwar wurden unter genau denselben Bedingungen sowohl die Aufnahmen der

Dopplerverschiebung der Linie des Wasserstoffs wie die Veränderung im magnetischen Felde vorgenommen. Auch die mehrstündigen Expositionszeiten wurden so gleich wie möglich gewählt.

Die beobachteten Verbreiterungen zeigten sich tatsächlich so groß, wie sie von der Theorie vorausgesehen werden. Immer waren die senkrecht zu  $[vH]$  polarisierten Komponenten wesentlich stärker verbreitert.

Gemessen wurde die Gesamtbreite. Nun ist diese durch die größten Geschwindigkeiten bedingt, die in den Kanalstrahlen vorkommen. Da das Leuchten mit zunehmender Geschwindigkeit relativ schnell kleiner wird, so ist die Grenze nicht scharf definiert, sondern hängt von den Intensitäten und der Expositionsdauer ab. Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wurde für jede gemessene Verbreiterung die größte Geschwindigkeit am Dopplerstreifen beobachtet, bei gleicher Maximalschwärzung, gleicher Expositionsdauer und im übrigen nahe gleichen Bedingungen.

Die Tabelle enthält die Messungen.

Spannung Volt	Grenz- geschwin- digkeit	Proz.	Linienbreite			
			Äußere Komponente		Innere Komponente	
			berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
$H_\gamma$						
5000	$6,5 \cdot 10^7$	$11000 \cdot 10^8$	4,4 Å.	3,9 Å.	3,2 Å.	2,8 Å.
5000	6,5	11000	4,4	5,0	—	—
8200	5,2	8800	3,5	4,2	2,6	2,3
8200	6,6	11200	4,5	4,8	3,3	3,7
14500	7,7	13100	5,2	6,2	3,8	4,8
$H_\beta$						
5000	6,8	11600	3,2	4,3		
8200	6,4	10900	3,0	4,2		
14500	7,7	13100	3,6	4,8		

Die erste Reihe gibt die Entladungsspannung, die zweite die am Dopplerstreifen gemessene größte Geschwindigkeit, die dritte die Größe  $vH$ . Die nächsten Reihen geben die Linienbreiten. Als äußere Komponente sind die senkrecht zu  $[vH]$  polarisierten, als innere die parallel polarisierten bezeichnet.

Zum Vergleich ist die Linienverbreiterung berechnet, wie sie einer Kraft  $vH$  entsprechen würde, wenn nach den ersten Beobachtungen von Stark durch ein Feld von 13000 Volt/cm

die äußeren Komponenten von  $H_\gamma$  einen Abstand von 5,2 Å.-E., die von  $H_\beta$  einen solchen von 3,6 Å.-E., die inneren Komponenten von  $H_\beta$  einen Abstand von 3,8 Å.-E. haben.

Man sieht, daß die beobachteten und berechneten Werte nahe übereinstimmen.

### Aufspaltung der Linien.

Bei den beschriebenen Versuchen konnte nur eine sehr erhebliche Verbreiterung, keine eigentliche Spaltung, beobachtet werden. Die letztere war nur einmal bei  $H_\gamma$  angedeutet bei einer Beobachtung mit niedriger Spannung der Entladung, weil hier eine verhältnismäßig schwache Lichtaussendung der ruhenden Teilchen, welche sonst eine unverschobene Linie in der Mitte geben, stattgefunden hatte.

Um eine größere Trennung der Linien zu erhalten, mußte das Magnetfeld verstärkt werden. Außerdem wurde die Dispersion des Spektrographen vergrößert.

Die Schwierigkeiten, die sich der Durchführung dieser Versuche entgegenstellten, waren erheblich größer, als anfangs vermutet werden konnte. Das Magnetfeld wurde durch einen Elektromagneten nach Du Bois<sup>1)</sup> (großes Modell) erzeugt. Leider verträgt dieser sonst vortreffliche Apparat bei dem angebrachten Kühlungssystem noch nicht die ungemein langen Betriebszeiten, die ihm bei diesen Versuchen zugemutet werden mußten. So kam es, daß die Isolationen der Wickelungen zweimal sehr beschädigt wurden, obgleich der Strom nicht einmal die angegebene Stärke von 27,5 Amp., die für längere Belastung angegeben ist, erreichte. Hierdurch waren der Untersuchung von vornherein Grenzen gezogen.

Es traten indessen noch andere Schwierigkeiten auf. Das viel stärkere Feld des Du Boisschen Magneten übt auf die eiserne Kathode eine so starke Anziehungskraft aus, daß die Glasröhre die Kathode nicht tragen kann und daher regelmäßig zertrümmert wurde. Es mußte daher auf die gewöhnliche Anordnung verzichtet werden.

Ferner kann zwischen den eisernen Armaturen kein eiserner Schutzzyylinder von so großem Durchmesser angebracht werden, wie ich ihn sonst zu gebrauchen pflegte. Wegen des kleineren Eisenzyinders mußte auch der Durchmesser der Entladungs-

1) H. du Bois, Ann. d. Phys. 42. p. 953. 1913.

röhre verkleinert werden, wodurch die Erzeugung der Kanalstrahlen nicht günstig beeinflußt wird.

Die Verstärkung des Magnetfeldes und die Vergrößerung der Dispersion hatten auch zur Folge, daß die Spektrallinien stärker auseinandergezogen wurden und dadurch viel lichtschwächer waren. Auch wurden die Kanalstrahlen selbst durch das stärkere Magnetfeld mehr geschwächt. Um die Expositionszeiten nicht ins Unmögliche anwachsen zu lassen, mußte eine stärkere Stromquelle für die Erzeugung der Kanalstrahlen benutzt werden. Induktionsapparate erwiesen sich für die von dem engen Eisenzyylinder umschlossene Entladungsröhre als unbrauchbar. Es wurde daher eine zweite vierzigplattige Influenzmaschine angefertigt. Diese Maschine ist vom Institutsmechaniker des Physikalischen Instituts, Hrn. J. Wendel, in vortrefflicher Ausführung hergestellt. Immerhin verstrich geraume Zeit, bis der Apparat vollkommen brauchbar war. Diese Influenzmaschine gibt unter günstigen Bedingungen einen Strom von 2 Milliamp. Mit der zwanzigplattigen zusammen war ein Strom von 2,8—3 Milliamp. zu erreichen. Aber der stärkere Strom in der Entladungsröhre verlangte wieder eine neue Änderung. Durch das innerhalb des Schutzzyinders übrigbleibende Magnetfeld werden die Kathodenstrahlen etwas abgelenkt, so daß sie die Seitenwand der Entladungsröhre treffen. Die Glasröhren vertrugen bei dem stärkeren Strom die dadurch hervorgerufene Erhitzung nicht und zersprangen nach kurzer Zeit. Diese Schwierigkeit wurde durch Benutzung eines Rohres aus Hartbrandporzellan (innen und außen glasiert) der Kgl. Porzellanmanufaktur in Charlottenburg beseitigt. Dieses Rohr bewährte sich vortrefflich.

Figg. 1 und 2 zeigen die schließliche Anordnung. Als Magnetpole wurden die Kegelpole 43:6 mm benutzt, von denen einer durchbohrt war. Der Polabstand betrug 4,5 mm. *M* ist der Magnetschutz, die Kathode *K* mit ihm massiv verbunden. Auf dem Eisen der Kathode liegt eine Aluminiumscheibe. In die Durchbohrung ist die Glasröhre *r* eingesetzt, die sich zwischen den Polen des Magneten befindet. Sowohl diese Röhre wie die Porzellanröhre *P* sind mit Chotimskykitt festge kittet. Die Röhre *r* führt auch zur Gaedepumpe, um einen beständigen Strom von Wasserstoff durch die Entladungsröhre zu leiten. Durch das Rohr *R* fließt beständig

Kühlwasser, damit die Kathode sich nicht erwärmt. Das Licht der Kanalstrahlen geht durch die Durchbohrung *O*, fällt auf das Kalkspatprisma *D*, dann auf den Kondensor *C*,

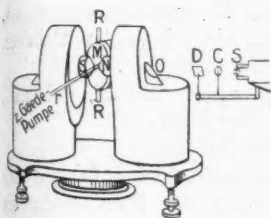


Fig. 1.  $\frac{2}{15}$  nat. Größe.

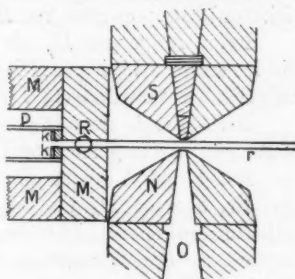


Fig. 2.  $\frac{2}{5}$  nat. Größe.

der die beiden reellen Bilder auf den Spalt *S* des Spektrographen entwirft. Die Entfernung zwischen Röhre *r* und Kondensor betrug 48 cm, die Entfernung vom Kondensor bis zum Spalt 5 cm.

Um eine größere Dispersion des Spektrographen zu erreichen, wurde die Steinheilsche Kameralinse durch ein Zeißches Tessar, wie es auch von Hrn. Stark verwendet wurde, ersetzt. Die Linse hat ein Öffnungsverhältnis von 1:4,5 und eine Brennweite von 40 cm. Wenn auch die Lichtstärke des Apparates etwas verringert war, so ist doch der Vorteil der größeren Dispersion für die Aufspaltung der Linien sehr wesentlich gewesen. Das Tessar wurde von der Firma Zeiß leihweise überlassen. Ich möchte ihr für das freundliche Entgegenkommen bestens danken.

Als photographische Platten wurden teils „Hauff Extra rapid“, teils „Lumière sensibilité extrême“ verwendet. Letztere waren ein wenig empfindlicher. Als Entwickler wurden Hydrochinon-, später Glycineentwickler benutzt.

Die Expositionen waren meist sehr lang.  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  konnten normal exponiert werden;  $H_\delta$  war selbst nach 60stündiger Exposition und sehr breitem Spalt noch stark unterbelichtet.

Auf der Tafel V ist eine Anzahl der Aufnahmen vergrößert wiedergegeben, da die Originalaufnahmen zu klein sind. Die Vergrößerung ist auf photographischem Wege von

den Herren Dr. Seemann und Dr. Rüchardt ausgeführt, denen ich meinen besten Dank für ihre Bemühungen sage.

Nr. 1 zeigt die äußeren (senkrecht zur Kraft [ $\S$  b] polarisierten) Komponenten von  $H_\beta$  getrennt, die inneren verbreitert.

Nr. 2 zeigt von  $H_\gamma$  die äußeren Komponenten getrennt, die inneren verbreitert. Die von den nicht bewegten Teilchen ausgesandte ungeänderte Linie ist nicht sichtbar.

Nr. 3 zeigt die äußeren Komponenten von  $H_\gamma$  getrennt, außerdem die ungeänderte Linie in der Mitte.

Nr. 4 und 5 zeigen dasselbe wie Nr. 3.

Nr. 6 zeigt  $H_\beta$  als sehr verbreiterte Linie. Wegen der außerordentlichen Lichtschwäche mußte der Spalt mehr als doppelt so breit genommen werden. Daher ist die Trennung nicht sichtbar.

Die an diesen Aufnahmen gemessenen Verschiebungen der Linien (beobachtet) sind mit denen aus der elektrischen Aufspaltung gewonnenen (berechnet) verglichen.

Nr. 1. Platte  $\vartheta$ ,  $H_\beta$ , gemessener Abstand der äußeren Komponenten 1,2 mm.

Dispersion:  $11 \times 1 \text{ mm} = 30 \text{ \AA.-E.}$

Daraus berechnet sich:  $3,25 \text{ \AA.-E.}$  als Abstand.

Die Geschwindigkeit im Dopplerstreifen betrug  $4,7 \cdot 10^7$  für die größte Intensität.

Daraus folgt  $Hv = 11750 \cdot 10^6$ .

Für genau dieselbe Kraft 11750 Volt/cm findet Wilsar<sup>1)</sup>  
 $3,2 \text{ \AA.-E.}$

Nr. 3. Platte  $\vartheta$ ,  $H_\gamma$ , gemessener Abstand der äußeren Komponenten = 3 mm.

Dispersion:  $11 \times 1 \text{ mm} = 19 \text{ \AA.-E.}$

Abstand =  $5,2 \text{ \AA.-E.}$

Nach Wilsar berechnet =  $5,0 \text{ \AA.-E.}$

Bei den folgenden Aufnahmen wurde der Intensitätsunterschied zwischen den beiden senkrecht zueinander polarisierten Bildern dadurch beseitigt, daß vor die Kondensorlinse ein parallel zur Achse geschnittenes Glimmerplättchen

1) H. Wilsar, Gött. Ber. 1914. p. 93.



gebracht wurden, so daß jeder der beiden aus dem Kalkspat austretenden Strahlen in zwei Strahlen zerlegt wurde, deren Polarisationssebene um  $45^\circ$  gegen den Spalt geneigt war. Auf diese Weise schwächte die polarisierende Wirkung des Spektrographen beide Bilder in gleicher Weise.

Nr. 4. Platte  $\alpha$ ,  $H_\gamma$ , gemessener Abstand der äußeren Komponenten 3 mm.

Dispersion:  $12 \times 1 \text{ mm} = 19 \text{ \AA.-E.}$

Daher ist der Abstand =  $4,8 \text{ \AA.-E.}$

Die mittlere Geschwindigkeit ist  $4 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}$ ,  $H = 26000$ , daher

$$vH = 10400 \cdot 10^8.$$

Abstand (berechnet) =  $4,5 \text{ \AA.-E.}$

Nr. 5. Platte  $\gamma$  gibt dasselbe.

Nr. 6. Platte  $\delta$ . Bei  $H_\delta$  kann nur die Verbreiterung gemessen werden. Es muß daher wieder die größte Geschwindigkeit der Rechnung zugrunde gelegt werden.

A. Äußere Komponenten:

Gemessene Breite: 10 mm.

Dispersion:  $12 \times 1 \text{ mm} = 13,6 \text{ \AA.-E.}$

Daher Breite (beobachtet):  $11,3 \text{ \AA.-E.}$

Nach Stark<sup>1)</sup> ist der Abstand der äußeren Komponenten bei  $H_\delta$  bei einem Felde von  $28500 \text{ Volt/cm} = 17,7 \text{ \AA.-E.}$

Die maximale Geschwindigkeit betrug für Platte  $\delta$ :

$$v_m = 6,5 \cdot 10^7.$$

Daher ist  $Hv = 26000 \cdot 6,5 \cdot 10^7 = 17000 \cdot 10^8$ .

Die Breite berechnet sich hieraus

$$\frac{17,7 \cdot 17000}{28500} = \underline{\underline{10,6 \text{ \AA.-E.}}}$$

B. Innere Komponenten:

Gemessene Breite: 7 mm

$$= 7,9 \text{ \AA.-E.}$$

1) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 1026. 1914.

Der Abstand der inneren Komponenten ist bei 28500 Volt/cm nach Stark = 13 Å.-E., also für 17000 berechnet

$$= 7,7 \text{ Å.-E.}$$

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die von der Theorie verlangte Spaltung der Linien tatsächlich beobachtet und daß auch die Größe der Zerlegung die richtige ist.

In theoretischer Hinsicht ist dieses Ergebnis insofern von Bedeutung, als dadurch gezeigt wird, daß eine wirklich strenge Folgerung aus der elektromagnetischen Theorie sich auch für die Vorgänge bei der Lichtaussendung bestätigt. Man wird daher doch Bedenken tragen, eine Theorie, die sich so gut bewährt, zu verlassen.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß die beobachtete elektrodynamische Wirkung auf die Spektrallinien auf der Sonne vorkommt. Das in den Sonnenstrahlen festgestellte Zeemansche Phänomen hat erwiesen, daß auf der Sonne starke magnetische Felder vorhanden sind. Falls auch schnell bewegte leuchtende Wasserstoffatome vorkommen, so würde die elektrodynamische Spaltung der Linien beobachtet werden müssen.

Würzburg, Februar 1916.

(Eingegangen 28. Februar 1916.)

#### 4. *Versuche über das Leuchten der Wasserstoff-Kanalstrahlen;* *von R. v. Hirsch.*

(Hierzu Tafel VI–IX.)

Die im folgenden beschriebenen Versuche befassen sich mit einigen Fragen, die seit Entdeckung des Dopplereffektes an Kanalstrahlen mehrfach angeschnitten worden sind, aber trotz mancher Diskussion noch als strittig gelten müssen. Sie beziehen sich alle auf den Leuchtvorgang und suchen zunächst die ungeklärten Punkte früherer Arbeiten aufzuheben. Dies dürfte insofern gelungen sein, als sich in das gewonnene Bild so ziemlich das ganze einschlägige Versuchsmaterial einordnen läßt, ohne die Experimente selbst in Zweifel zu ziehen. Nur in einigen Punkten, die den Leuchtvorgang selbst nicht betreffen, sind ungeklärte Gegensätze zurückgeblieben, ja neue entstanden; sie werden hier nur so weit besprochen, als es zum Verständnis des Übrigen notwendig ist.

Die *Versuchsanordnung* unterscheidet sich nicht wesentlich von der bisher üblichen, und zwar ist durchwegs die ältere Form der Kanalstrahlenröhre verwendet, bei welcher Erzeugungs- und Beobachtungsraum der Strahlen frei kommunizieren, also stets auf gleichem Druck stehen. Diese Anordnung hat den Vorzug einfacher Röhrenkonstruktion — keine Kittung an der Kathode; sie gestattet die von Paschen angegebene gründliche Reinhaltung des Wasserstoffs mittels Kokoskohle in flüssiger Luft. Vor allem aber bietet sie gegenüber der Durchströmungsmethode den Vorteil größerer Lichtstärke, da die Kathode mit vielen Löchern zu einem förmlichen Sieb ausgestaltet werden kann. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß jede Druckänderung Beobachtungs- und Erzeugungsraum gleichzeitig trifft, so daß es nicht ohne weiteres möglich ist, das Leuchten desselben Strahles bei verschiedenen Drucken zu untersuchen. Dieser Nachteil wiegt

um so schwerer, als nach unseren Resultaten der Druck auch auf die Geschwindigkeit der Strahlen von wesentlichem Einfluß ist, so daß Druck und Geschwindigkeit nicht unabhängig voneinander variiert werden können (vgl. unten). Hier mußte durch Verwendung verschieden geformter Röhren abgeholfen werden: die Röhren erwiesen sich nämlich je nach ihrer Gestalt verschieden hart, d. h. sie gaben bei gleichen Gasdrucken und Spannungen um so schnellere Strahlen, je enger die Rohrwand die Kathodenvorderfläche umschloß. Es wurden also die Kathoden (6 cm lange Zylinder mit einem aufgesetzten durchlöcherten Aluminiumdeckel von 4 cm Durchmesser) zum Teil in den Hals großer Kolben so eingesetzt, daß die Siebfläche in den Kugelraum hineinragte (weiche Röhren); zum Teil staken sie in zylindrischen Röhren, die nur eine geringe Auftreibung an der Kathodenvorderfläche erhielten, um Funkenbildung an der Glaswand zu verhindern (harte Röhren). Durch dieses Mittel war es möglich, die Härte der Röhren weitgehend zu ändern und so Aufnahmen bei gleicher Strahlgeschwindigkeit aber stark abweichenden Drucken und umgekehrt zu erhalten. Alle anderen Einzelheiten der Röhren, wie Abstand der Elektroden, Lochgröße der Kathode und ähnliches erwiesen sich in Übereinstimmung mit aller früheren Erfahrung als gleichgültig. Es genügt daher die Angabe, daß die Anodenscheibe der Kathode stets so gegenüberstand, daß sie die stark erhitze Kathodenstrahlung abfing, ohne aber die Ausbildung genügender Dunkelräume zu stören. Der Beobachtungsraum jenseits der Kathode war bis 50 cm lang und meist durch eine aufgekittete Glasplatte beendet.

Die erste Evakuierung geschah mit der Gaedeschen rotierenden Hg-Pumpe, die weitere Reinigung und Druckregulierung mittels Kokoskohle in flüssiger Luft, genau nach der von Paschen<sup>1)</sup> angegebenen Art. Um eine Hg-freie Füllung zu erhalten, mußte aber der Gebrauch der Pumpe stark eingeschränkt werden, da die Elektroden leicht amalgamierten und dann kaum mehr ganz Hg-frei wurden; deshalb wurde schon bei der Rohrreinigung (mittels starker Induktor-entladung) nur mit der Kühlung unter Absperrung von der Pumpe gearbeitet. Wasserstoff konnte durch einen Palladium-

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. p. 247. 1907.

draht eingelassen werden, soweit er nicht durch die Entladungen aus den Elektroden gewonnen wurde.

Die Forderung, Hg auszuschließen und doch den Druck beständig zu kontrollieren, führte zum Bau eines Hg-freien Manometers, welches auf den Resultaten von Knudsen<sup>1)</sup> über Wärmeleitung in verdünnten Gasen fußt und als Hitzdrahtinstrument ausgebildet wurde. Ein 0,015 mm dicker, 10 cm langer Wollastondraht wurde in der Achse einer 1 cm weiten Glasröhre ausgespannt, die dem evakuierten Raum angeschlossen war. Er bildete den einen Zweig einer Wheatstoneschen Brückenschaltung, die mit drei konstanten Widerständen so abgeglichen war, daß die Brücke stromlos blieb, wenn der Wollastondraht durch den Strom auf eine bestimmte Temperatur erhitzt wurde, die zu ungefähr 120° gewählt war. Da in dem hier in Betracht kommenden Druckgebiet die Wärmeleitfähigkeit der Gase ihrem Druck proportional geht, so wächst die zur Aufrechterhaltung der festgelegten Drahttemperatur erfordernte Joulesche Wärme ebenfalls mit dem Druck; dieser ist also dem Quadrat des Heizstromes proportional, der an einem eingeschalteten Milliamperemeter gemessen wird. Voraussetzung einer richtigen Messung ist die Reinheit des Gases, die für die Versuche schon an sich, der Strahlung halber, zu fordern war. Nur bei absichtlicher Verunreinigung, die einmal verwendet wurde, war das Manometer nicht zu gebrauchen. Die Eichung durch Vergleich mit dem McLeodmanometer (unter geeigneten Vorsichtsmaßregeln wegen der Hg-Dämpfe) bestätigte die Proportionalität des Druckes mit dem Heizstromquadrat mit aller erforderlichen Genauigkeit. Die stete Kontrolle des Brückeninstrumentes gestattete den gewünschten Gasdruck mit voller Sicherheit auch bei langen Expositionen festzuhalten.

Als Stromquelle wurde anfangs ausschließlich eine Akkumulatorenbatterie von 1200 Elementen verwendet, die Klemmspannung mit dem Braunschen Elektrometer gemessen. Da sich aber bald zeigte, daß die Anforderungen an Konstanz der Spannung recht geringe waren, andererseits die Akkumulatorenspannung nicht überall genügte, so wurde später vielfach ein großer Induktor verwendet, der ohne Unterbrecher

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 36. p. 635. 1911.

mit Wechselstrom betrieben wurde, und dessen eine Phase meistens durch eine Ventilröhre unterdrückt war, wie sie in der Röntgentechnik gebräuchlich sind.

Optik: Die Aufnahmen sind mit einem Spektrographen von Fuess gemacht; Objektive von 25 cm Brennweite, Öffnungsverhältnis 5:1; Plangitter von 8 cm geteilter Fläche mit 48700 Strichen, von Anderson geteilt und genügend frei von Geistern, um in den drei ersten Ordnungen gebraucht werden zu können. Der Spektrograph stand ohne Zwischenschaltung von Linsen vor der Kanalstrahlenröhre.

Von den erhaltenen Aufnahmen wurden mittels des Registrierphotometers von Koch<sup>1)</sup> die Schwärzungskurven abgenommen. Wiederholte Ausmessungen, auch an verschiedenen Stellen der Linien, ergaben stets volle Übereinstimmung. Auch verschiedene Aufnahmen, die unter den gleichen Bedingungen erhalten waren, stimmten sehr befriedigend zusammen. Es sind nur Aufnahmen verwertet, deren Schwärzungen in dem für das Instrument günstigsten mittleren Gebiet liegen. Eine Reduktion auf wahre Intensität war nicht erforderlich, da die erhaltenen Effekte augenfällig waren, eine quantitative Messung aber nicht in Frage kam. Zum Zweck des Vergleiches sind die Registrierkurven zum Teil aufeinander kopiert; die verglichenen Aufnahmen sind natürlich stets mit gleicher Empfindlichkeit des Photometers erhalten und entstammen, wo verschiedene Linien in Betracht kommen, der gleichen photographischen Platte. Die Abszissenabstände der Doppleraufnahmen sind durch das Registrierinstrument im Verhältnis 50:1 vergrößert.

*Vorversuche.* Bevor auf die eigentlichen Versuche eingegangen wird, die das Leuchten der Kanalstrahlen betreffen, sind einige Punkte zu besprechen, die bei der Herstellung der Strahlen von Wichtigkeit sind.

1. Wie bereits erwähnt, hat sich gezeigt, daß die Geschwindigkeit der Strahlen, wie sie aus dem Abstand des bewegten Streifens von der Ruhelinie im Dopplereffekt entnommen werden kann, auch bei unveränderter Elektrodenspannung mit dem Gasdruck variiert. Dies ist so zu verstehen, daß die mit der Druckänderung verbundene Änderung

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 39. p. 706. 1912.

in der Entladung, wie sie sich in der Wanderung des Kathoden-  
dunkelraumes deutlich kundgibt, die Strahlgeschwindigkeit be-  
einflußt. Das Resultat ist aus Fig. 1<sup>1)</sup> zu entnehmen, in welcher  
vier Aufnahmen bei gleicher Entladungsspannung  $V$ , aber  
verschiedenem Druck  $p$  und Dunkelraum  $d$  zusammengestellt  
sind. Die experimentellen Daten gibt die Tabelle.

Nr.	$V$	$p$ <small>mm</small> Hg	$d$ cm	Expositionszeit Stunden	Bemerkungen
1	2200 Volt	23,5	2	3	$H_a$ Dispersion: 1 mm = 12 Å.
2	2200 "	15,5	3	7	
3	2200 "	10,0	5	9	
4	2200 "	6,5	8	18	

Die Stelle maximaler Schwärzung und mit ihr der Schwer-  
punkt der bewegten Streifen rücken bei abnehmendem  $p$  und  
wachsendem  $d$  deutlich von der Ruhelinie ab.

Dieses Ergebnis widerspricht der bisherigen Annahme,  
besonders den Angaben von Paschen.<sup>2)</sup> Es ist nicht gelungen,  
den Grund des Widerspruches aufzufinden. Jedenfalls ver-  
anlaßt das angeführte Resultat, bei den eigentlichen Ver-  
suchen die Dunkelraumlänge und, wo diese schlecht meßbar  
war, den Druck unter genauer Kontrolle zu halten.

2. Andererseits ist bei dem mit dem Induktor gemachten  
Aufnahmen keine Spannung angegeben, da ein angeschaltetes  
Elektrometer nur einen Mittelwert, eine Parallelfunkstrecke  
einen Maximalwert geben würde, der nicht maßgebend ist.  
Vielmehr liegt die für die Strahlung wesentliche Spannung  
zwischen jenem Maximalwert einerseits und einem Minimal-  
potential andererseits, bei dem die Entladung einsetzt, und  
das wieder vom Gasdruck abhängt. Bei der hier verwendeten  
Schaltung, ohne Unterbrecher, wo der Sekundärstrom des  
Induktors keine scharfen Zacken bildet, ist jenes Intervall  
nicht so groß, daß eine merkliche Verschlechterung der  
Schärfe des bewegten Streifens zu erkennen wäre. So sind  
in Fig. 2 zwei Aufnahmen, die eine mit Gleichspannung,  
die andere mit dem Induktor erhalten, aufeinander geworfen,  
aus welchen man die Gleichwertigkeit beider Stromquellen  
ersieht.

1) Die Figg. 1—7 befinden sich auf Tafel VI—IX.

2) l. c. p. 254.

Die experimentellen Daten sind folgende:

Nr. 44	$V$	$p$	$d$	Expositionszeit	Bemerkungen
1	2000	10,0	3,0	$\frac{1}{2}$ Stunde	} Hg 24 Å. = 1 mm
2	Induktor	9,5	3,0	$\frac{3}{4}$ Stunden	

Wo in der Folge der Induktor zu vergleichenden Versuchen benutzt wurde, ist außer  $p$  und  $d$  die Primärstromstärke konstant gehalten; aus den Registrierkurven ist ersichtlich, daß dies genügte, um die Strahlgeschwindigkeit, d. h. den Abstand der Ruhelinie von dem Schwärzungsmaximum der bewegten Intensität, in befriedigender Weise festzuhalten.

#### *Versuche über den Leuchtvorgang:*

1. Die zuerst untersuchte Frage betraf den Gang des Verhältnisses der bewegten zur ruhenden Intensität im Dopplereffekt ( $B/R$ ), der bei Änderung von Druck und Geschwindigkeit beobachtet ist; im Zusammenhang hiermit die Farbenänderung, d. h. die Änderung im Intensitätsverhältnis verschiedener Linien der Wasserstoffserie, die mit der ersten Größe weitgehend parallel zu gehen scheint. Für den Leuchtvorgang bedeutsam ist hier einmal der von Vegard<sup>1)</sup> gefundene Gang von  $B/R$  mit dem Druck, aus dem zu schließen wäre, daß der einzelne Zusammenstoß das bewegte und das ruhende Teilchen nicht gleichmäßig anregt; sodann die Farbenverschiebung nach Blau für wachsende Geschwindigkeiten, die Stark<sup>2)</sup>, allerdings bei gleichzeitig abnehmenden Drucken, erhalten hat und die für das Leuchten im Strahl eine gewisse Ähnlichkeit mit der Temperaturstrahlung bedeuten würde. Nach Vegard<sup>3)</sup> dagegen handelt es sich dabei um einen recht komplizierten Druckeffekt. In den hier beschriebenen Versuchen zeigte sich zunächst keinerlei Einfluß des Druckes auf das Verhältnis  $B/R$ . Dieser doppelte Widerspruch löste sich schließlich in der Weise, daß es gelang, die ganze von Stark und Vegard beschriebene Erscheinungsgruppe zu erhalten, und zwar bei unverändertem Druck und unveränderter Geschwindigkeit, allein durch Beobachtung in verschiedener Entfernung von der Kathode. Hierbei wurde der 50 cm

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. **39**. p. 111. 1912.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. **21**. p. 434. 1906.

3) L. Vegard, l. c. p. 143; vgl. auch F. Lunkenheimer, Ann. d. Phys. **36**. p. 134. 1911; **37**. p. 823. 1912.



lange Beobachtungsraum der Röhre an verschiedenen Stellen seitlich in einem  $\approx$  von etwa  $38^\circ$  gegen die Achse anvisiert; es wurde das übereinandergelagerte Spektrum 2. und 3. Ordnung für  $H_\alpha$  und  $H_\gamma$  benutzt, das den Vorzug besitzt, beide Linien im gleichen Maßstab des Dopplereffektes zu liefern, da die Wellenlängen der Linien nahezu im Verhältnis 3:2 stehen.

Fig. 3 zeigt den Gang des Verhältnisses  $B/R$ .

Die experimentellen Daten sind die folgenden:

Aufnahme 73.  $H_\alpha$ . Dispersion  $22 \text{ \AA./mm.}$   $p = 7,5$ . Induktor.

II 40 cm hinter der Kathode

III unmittelbar hinter der Kathode

} beobachtet.

(Beide Registrierkurven sind so kopiert, daß die Ruhelinien sich decken.)

(Die dritte Kurve 78 vgl. später.)

In Fig. 4 ist für dieselbe Aufnahme das Farbenverhältnis dargestellt. Es sind jetzt die Registrierkurven von  $H_\alpha$  und  $H_\gamma$  so aufeinander geworfen, daß die Schleierlinien sich decken.

Zum Vergleich ist in Fig. 5 die Farbenverschiebung bei gesteigerter Geschwindigkeit und abnehmendem Druck dargestellt, wie sie Stark ursprünglich erhalten hatte:

Platte 67.  $H_\alpha$  und  $H_\gamma$ . Dispersion  $22$  bzw.  $15 \text{ \AA./mm.}$  Induktor.

Aufnahme IV

$p = 14$

$d = 3$

"

V

5,5

7

Die Photogramme 73 zeigen deutlich, daß in größerer Entfernung von der Kathode die bewegte Intensität gegen die ruhende und die Linie  $H_\gamma$  gegen  $H_\alpha$  geschwächt ist, obwohl Druck und Strahlgeschwindigkeit dieselben geblieben sind. Die längere Gasstrecke hat also ebenso gewirkt wie die dichtere Gasstrecke (Vegard) oder die kleinere Geschwindigkeit (Stark). Dies bedeutet wohl, daß es nur auf die Gesamtzahl der Begegnungen von bewegten mit ruhenden Teilchen ankommt. Die ganze Erscheinung wäre also nur die optische Seite der von Wien<sup>1)</sup> nachgewiesenen Umladungswirkung, die sich dort an der Änderung des Ladungszustandes entlang der Strahlenbahn zu erkennen gab.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 33. p. 871. 1910.

Hiernach wäre zu erwarten, daß bei hohen Drucken, langsamen Strahlen und in genügender Entfernung von der Kathode, wo das Gleichgewicht im Strahl eingetreten ist, keine Druckabhängigkeit mehr zu finden wäre; eben dieser Fall entspricht unseren ersten Versuchen, die mit denen Vegarda so vollständig im Widerspruch schienen, und von denen Fig. 6 ein Beispiel zeigt:

Platte 37. I.				} $V = 2000. H_a.$ 12 Å. = 1 mm. Beobachtet 30 cm von der Kathode,    der Achse.
$p = 9,5$	$d = 5$	Kugelröhre		
Platte 38. III				
$p = 21$	$d = 2,8$	Zylinderröhre		

Das Verhältnis  $B/R$  dieser langsamen Strahlen ( $v = 1,7 \cdot 10^7$ ) hat sich trotz des großen Druckunterschiedes nicht geändert. Ein wirklicher direkter Druckeffekt ist also nicht vorhanden.

Um die oben ausgesprochene Hypothese, welche die ganzen Erscheinungen als Umladungswirkung anspricht, näher zu prüfen, wurden einige weitere Resultate von Wien betreffs der Umladungen herangezogen. Hiernach haben geringe Beimengungen fremder Gase deutliche Wirkungen, die wohl so zu verstehen sind, daß alle Stoffe, die leicht Elektronen abgeben, die Neutralisierung, alle Stoffe, die leicht Elektronen binden, die Ionisierung des Strahles fördern. Als Beispiel wurde einmal Hg-Dampf eingelassen, wozu die Öffnung der Verbindung zum McLeodmanometer genügte; andererseits wurde  $\text{CO}_2$  aus Soda entwickelt und in kleinen, nicht gemessenen Mengen in die Röhre eingeführt, so daß die Farbe der Kanalstrahlen einen deutlichen Stich ins Graue zeigte. Die Wirkung des Hg-Dampfes ist aus Fig. 3 ersichtlich. Hier ist die Aufnahme 78 unter identischen Bedingungen wie 79 II erhalten, jedoch in Anwesenheit von Hg, dessen eine Linie auf dem Photogramm sichtbar ist. Die bewegte Intensität ist durch die Beimengung erhöht; es wirkt also nicht, wie häufig angenommen wird, jede Verunreinigung schwächend auf den Dopplerstreif. Die umgekehrte Wirkung von  $\text{CO}_2$ , die sehr bekannt ist, zeigt Fig. 7.

Platte 82.  $H_a.$  Dispersion 22 Å./mm.  $H_\gamma.$  Dispersion 15 Å./mm.

VI	$d = 4,0$	$V = 1500$	} rein
VII	"	"	
			} mit $\text{CO}_2$ verunreinigt.

Die beiden Linien sind wieder aufeinander kopiert, so daß man nicht nur die Schwächung der bewegten Intensität durch die Beimengung ersieht, sondern auch die Farbenänderung, die die ganze Erscheinung als spezifische Umladungswirkung kennzeichnet.<sup>1)</sup>

2. Ist diese Erklärung richtig, so ist auch ein Einfluß eines Magnetfeldes auf das Kanalstrahlenlicht zu erwarten, wie ihn schon Bärwald<sup>2)</sup> gefunden zu haben glaubte, Vegard<sup>3)</sup> aber in Abrede stellte. Um diese Frage nochmals zu untersuchen, wurden die bisher gebrauchten zylindrischen Entladungsröhren zwischen die Pole eines starken Elektromagneten gebracht, so daß auf einer Strecke von etwa 5 cm eine Feldstärke von etwa 1000 Gauss erzeugt wurde, welche genügen sollte, um die positiven Teile dem Strahl weitgehend zu entziehen. Das Gebiet der Kathode und des Dunkelraumes waren durch einen über die Röhre geschobenen Mantel aus weichem Eisen vor der Feldwirkung geschützt. Es wurde nur die Farbe des Gesamtlichtes, ruhende + bewegte Intensität, untersucht, die dem Versuch die günstigsten Bedingungen bot. Zu diesem Zweck stand der Spektrograph jetzt  $\perp$  zur Strahlrichtung und wurde mit breitem Spalt (0,4 mm) und schwacher Dispersion benutzt. Er empfing das Licht eines 5 cm langen Rohrstückes unmittelbar hinter dem Ende des Feldes, während alle anderen leuchtenden Teile abgedeckt waren. Da das Magnetfeld das Licht des Strahles erheblich schwächte, wurde jede Aufnahme im Feld mit zwei bis drei Aufnahmen ohne Feld auf einer Platte vereinigt, welche alle den gleichen Entladungsbedingungen, aber verschiedenen Beleuchtungsstärken entsprachen; hierdurch sollte das Purkinjesche Phänomen eliminiert werden, demgemäß die Farbensensibilität der photographischen Platte von der absoluten Intensität abhängig sein konnte. Das Beobachtungsergebnis ist in den beiden Kurventafeln enthalten, welche die Schwärzungsverhältnisse  $H_\alpha/H_\beta$  bzw.  $H_\alpha/H_\gamma$  als Funktion der Schwärzung  $H_\alpha$  darstellen, alles in der Skala des Photometers gemessen. Wie nach dem Prinzip des Photometers

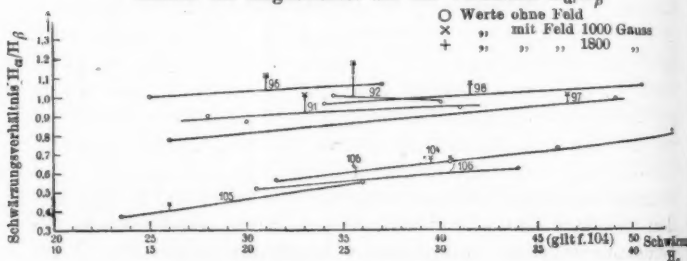
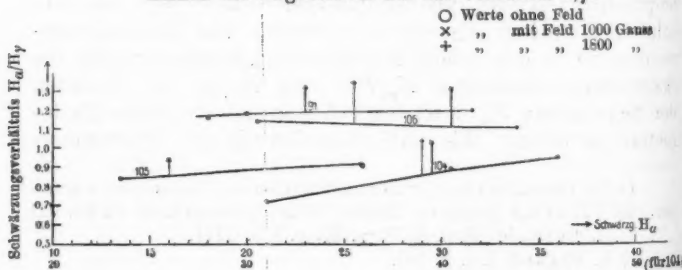
1) Die Farbenänderung ist nur an den ruhenden Intensitäten erkennbar. 82. VII ist mit geringerer Empfindlichkeit photometriert als 82. VI!

2) H. Bärwald, Ann. d. Phys. **34**. p. 883. 1911.

3) L. Vegard, l. c. p. 161.

und dem photographischen Schwärzungsgesetz zu erwarten war, liegen die Werte „ohne Feld“ auf einer Geraden, die gegen die Abszissenachse schwach geneigt ist (Purkinje-Phänomen), die Werte „im Felde“ aber ausnahmslos darüber. Das Feld hat die Farbe zugunsten von  $H_\alpha$  verschoben. Der Effekt ist für  $H_\alpha/H_\gamma$  erheblich deutlicher als für  $H_\alpha/H_\beta$ , wo er in einigen Fällen innerhalb der Meßfehler liegt; dies mag ein Grund sein, warum Vegard, der nur diese beiden Linien untersuchte, ein negatives Resultat erhielt. Die experimentellen Daten der in den Kurven verwendeten Aufnahmen sind folgende:

Platten Nr.	Spannung	Strahlgeschwindigkeit $v$	$p$
91	Induktor	$1,7 \cdot 10^7$	$11 \cdot 10^{-2}$ mm Hg
92	"	2,0	7,5
96	Akkumulator	1,9	9,5
97	"	1,7	11,0
98	"	< 1,5	17,5
104	Induktor	um 2	7,0
105	"	> 2	3,0
106	"	< 2	10,5

Einfluß des Magnetfeldes auf das Verhältnis  $H_\alpha/H_\beta$ Einfluß des Magnetfeldes auf das Verhältnis  $\alpha/\gamma$ .

Die bisherigen Versuche haben gezeigt, daß alle Mittel, welche den Ladungszustand der Kanalstrahlen beeinflussen, im Licht der Strahlung nachweisbar sind, so daß ein ursächlicher Zusammenhang anzunehmen ist. Wesentlich schwerer fällt es aber, sich über diese Wirkung ein im einzelnen befriedigendes Bild zu machen. Die nächstliegende Annahme, daß der positive und der neutrale Teil an sich verschieden leuchten, ist wohl auszuschließen; denn sonst könnte das Magnetfeld, welches die positiven Teile ausscheidet, nicht in gleichem Sinn auf die Farbe wirken wie die Beimengung von  $\text{CO}_2$ , das dieselben durch Elektronenbindung begünstigt. Die Suche nach einem befriedigenden Bild führte zu folgender Hypothese: Der Kanalstrahl leuchtet bei der Umladung, sowohl beim Verlust als bei der Rückkehr der Elektronen; beide Formen des Leuchtens sind aber nicht gleichartig: bei der Ionisierung ist die ruhende Intensität relativ stärker, was durchaus plausibel ist, da die Ionisierung wohl nur bei der Begegnung mit ruhenden Teilchen stattfindet, die Neutralisierung nicht notwendigerweise. Außerdem sind die langen Wellen begünstigt. Da nun die Bildung positiver bzw. neutraler Teilchen um so intensiver geschehen wird, je weiter der Zustand des Strahles von seinem Gleichgewicht abweicht und je größer die Geschwindigkeit der Reaktion ist, so erhält man starkes Ionisierungsleuchten (Rot und Ruhende Intensität stark) sowohl bei Anwesenheit von  $\text{CO}_2$ , das die freien Elektronen abfängt, als hinter dem Magnetfeld, wo die positiven Teilchen fehlen, sich also verstärkt bilden; dagegen starkes Neutralisierungsleuchten (Blau und Bewegte Intensität stark), nahe hinter der Kathode, wo die Zahl der positiven Teilchen die Gleichgewichtsverteilung überschreitet.

Die soeben ausgesprochene Hypothese geht auf Einzelheiten des Leuchtvorganges ein, für welche die beschriebenen Versuche eine allzu schmale Grundlage bilden. Wenn sie hier trotzdem mitgeteilt wird, so geschieht dies, weil ihre weitere Verfolgung Anlaß zu einem neuen Versuch gab. Der Gedankengang war folgender: Wenn das stärkere Auftreten der ruhenden Intensität beim Ionisierungsleuchten daher rührt, daß der Zusammenhang mit den Stößen hier ein engerer ist, so könnte die ausgezeichnete Richtung dieser Stöße sich in einer Polarisation des Lichtes zeigen. Daß das Gesamtlicht der Strahlen

polarisiert ist, hat Stark<sup>1)</sup> gefunden, und zwar  $H_a$  stärker als  $H_\gamma$ , wie es auch unsere Hypothese verlangt; denn  $H_a$  ist im Ionisierungslicht stärker vertreten. Es wäre nun aber zu erwarten, daß jede Beeinflussung der Umladungen auch den Polarisationszustand ändern würde; um diese Frage zu prüfen, genügte es, den vorbeschriebenen Versuch mit dem Magnetfeld im polarisierten Licht zu wiederholen.

3. Es wurde also vor das Fernrohrobjektiv des Spektrographen ein Doppelprisma aus Spat und Glas geschaltet, welches vom Spalt zwei Bilder übereinander entwarf, die das Licht der zum Kanalstrahl  $\parallel$  bzw.  $\perp$  Komponente enthielten. Das Schwärzungsverhältnis beider Bilder, mit und ohne Magnetfeld, wurde gemessen und ist in der folgenden Tabelle p. 868 direkt in dem Maß der Photometerskala angegeben.

In allen diesen Werten ist die durch den Apparat hervorbrachte Polarisation mitenthalten, die nicht stört, da sie überall gleich eingeht, und es nicht darauf ankam, den schon von Stark sichergestellten Effekt nachzuprüfen. Man erkennt denselben übrigens deutlich an den von  $H_\gamma$  zu  $H_a$  ansteigenden Werten der Polarisation, die nicht vom Apparat herrühren können und ganz den dortigen Angaben entsprechen. Die neue Tatsache aber liegt in der deutlichen Vergrößerung der Polarisation durch das Feld, die ihrerseits für  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  größer ist als für  $H_a$  und so die Vorstellungen bestätigt, die zur Anstellung des Versuches führten. Denn das blaue Licht, das im Neutralisierungsleuchten stärker vertreten und daher schwächer polarisiert ist, wird durch das Feld, das die positiven, zur Neutralisierung befähigten Teilchen herausnimmt, mehr geschwächt; die Polarisation tritt stärker hervor.

Der positive Ausfall auch dieses letzten Versuches gibt Veranlassung, das gewonnene Resultat im Bild der eingeführten Vorstellung nochmals zusammenzufassen, die trotz ihres stark hypothetischen Charakters den Vorzug besitzt, die zahlreichen Einzelheiten in anschaulicher Weise zu vereinigen: Der  $H$ -Kanalstrahl leuchtet bei der Umladung, sei es, daß er Elektronen gewinnt oder verliert; das Ionisierungsleuchten hängt näher mit dem „Stoß“ der bewegten gegen die ruhenden

1) J. Stark, Verh. d. Deutschen Physik. Ges. 8. p. 104. 1908; J. Stark u. H. Lunelund, Ann. d. Phys. 46. p. 68. 1915.

Tabelle.

Platte	$v$	$p$	Schwächung						Bemerkung			
			$H_a$		$H_\beta$		$H_\gamma$					
			Schwing.	$\perp$ Schwing.	Verhältnis		$\perp$	Verb.			$\perp$	Verb.
107. IV.	$< 2 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^{-3}$	40,0	37,0	1,08	46,0	45,0	1,02	34,5	35,0	0,99	ohne Feld
V.	$< 2 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^{-3}$	36,5	32,5	1,14	44,0	43,0	1,02	32,0	31,5	1,02	
		Mittel			1,11			1,02			1,00	
III.	$< 2 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^{-3}$	35,0	26,0	1,30	42,0	35,0	1,20	21,0	17,0	1,24	Feld von 1000 G.
108. II.	um $2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^{-3}$	23,0	18,0	1,28	40,0	36,5	1,10	23,0	21,0	1,10	ohne Feld
III.	um $2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^{-3}$	37,0	31,0	1,19	50,0	46,5	1,08	34,5	31,0	1,11	
V.	um $2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^{-3}$	33,0	28,0	1,18							
		Mittel			1,22			1,09			1,10	
IV.	um $2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^{-3}$	35,0	26,0	1,35	43,5	35,5	1,22	25,0	19,0	1,32	Feld von 1000 G.
109. II.	$< 2 \cdot 10^7$	$10,5 \cdot 10^{-3}$	29,0	26,0	1,12	36,0	34,5	1,04	23,5	23,5	1,00	ohne Feld
IV.	$< 2 \cdot 10^7$	$10,5 \cdot 10^{-3}$	38,3	34,0	1,13	47,0	45,5	1,03	34,0	34,0	1,00	
		Mittel			1,12			1,03			1,00	
III.	$< 2 \cdot 10^7$	$10,5 \cdot 10^{-3}$	30,0	22,5	1,33	44,0	32,5	1,35	23,5	19,5	1,21	Feld von 1000 G.

Teilchen zusammen als das Neutralisierungsleuchten; daher enthält es mehr ruhende Intensität und ist stärker polarisiert. Außerdem sind in ihm die langwelligen Linien des Spektrums stärker vertreten; hieraus folgt, daß im Rot das Verhältnis  $R/B$  größer<sup>1)</sup> und die Wirkung des Magnetfeldes auf die Polarisation geringer ist. Alle Umstände, welche die Umladung beeinflussen: Verunreinigung, Änderung des Gasdruckes, der Strahlggeschwindigkeit, der durchlaufenen Gasstrecke, wirken hierdurch indirekt auf das ausgesandte Licht; eine andere direkte Wirkung ist dagegen einstweilen nicht nachgewiesen.

---

1) Vgl. L. Vegard, l. c. p. 143; auch aus den früheren Figuren ersichtlich.

(Eingegangen 24. Februar 1916.)



## 5. Untersuchungen am Lithiumspektrum im elektrischen Felde; von H. Lüsser.

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Mechanische und elektrische Methoden. — § 3. Optische Methode. — § 4. Verhältnis der Intensitäten der Hauptserie und der ersten und zweiten Nebenserie. — § 5. Fehlen der Polarisierung bei der Hauptserie, der ersten und zweiten Nebenserie. — § 6. Feinzerlegung der ersten Nebenserie. — § 7. Einfluß der Feldstärke auf das Intensitätsverhältnis der Komponenten in der ersten Nebenserie. — § 8. Verschiebung der zweiten Nebenserie.

### § 1. Einleitung.

Der Effekt des elektrischen Feldes auf Lithiumlinien ist schon einmal Gegenstand einer experimentellen Untersuchung gewesen; J. Stark und H. Kirschbaum<sup>1)</sup> haben nämlich festgestellt, daß mehrere Li-Linien durch ein mäßig starkes Feld bei mäßig großer Dispersion (Grobzerlegung) in einige wenige Komponenten zerlegt werden. Nun hat Stark<sup>2)</sup> gefunden, daß die Wasserstofflinien, die in der Grobzerlegung ebenfalls nur wenige Komponenten aufweisen, in der Feinzerlegung bei der Anwendung sehr starker Felder eine beträchtlich größere Anzahl von Komponenten besitzen; auch hat daraufhin J. Koch<sup>3)</sup> mehrere He-Linien, die von Stark und Kirschbaum in der Grobzerlegung untersucht waren, weiter zerlegt. Unter diesen Umständen war eine Untersuchung von Li-Linien in starken elektrischen Feldern auf eine vermutliche Feinzerlegung wünschenswert. Nicht bloß galt es zu prüfen, ob die Feinzerlegung eine allgemeiner vorkommende Erscheinung sei. Darüber hinaus bietet ein Vergleich der elektrischen Zerlegungen entsprechender Li- und He-Linien im Hinblick auf das Problem der Atomstruktur Interesse. Es wird wichtig sein, zu erfahren, ob die Feinzerlegungen von

1) J. Stark u. H. Kirschbaum, *Ann. d. Phys.* **43**, p. 1029. 1914.

2) J. Stark, *Gött. Nachr.* 1914, p. 427; *Ann. d. Phys.* **48**, p. 193. 1915.

3) Vorläufige Mitteilung: J. Stark, *Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome*, p. 79. S. Hirzel, Leipzig 1914.

Linien jener zwei chemischen Elemente sich ebenso ähnlich sind wie die Grobzerlegungen.

Außer der Feinzerlegung wurde der vorliegenden Untersuchung noch eine andere Aufgabe gestellt. Ähnlich wie J. Koch<sup>1)</sup> an der von ihm aufgefundenen dritten Nebenserie des Heliums hat nämlich Stark<sup>2)</sup> unlängst an den Linien der dritten Nebenserie des Lithiums die voraussichtlich grundlegenden neuen Erscheinungen entdeckt, daß diese Linien durch das elektrische Feld zum Teil polarisiert und gleichzeitig außerordentlich im Verhältnis zu den übrigen Li-Linien verstärkt werden. Nachdem Stark festgestellt hatte, daß die Linien der zweiten Nebenserie jedenfalls nicht in annäherndem Maße wie diejenigen der dritten Nebenserie die neuen Erscheinungen zeigen, galt es durch eingehende Messungen zu prüfen, ob diese nicht doch in beschränktem Maße auch bei Linien der Hauptserie, der ersten und zweiten Nebenserie auftreten.

## § 2. Mechanische und elektrische Methoden.

Die zu den Versuchen benutzte Spektralröhre hatte die von Stark<sup>3)</sup> angegebene Form (Fig. 1). Sie bestand aus einem zylinderförmigen Glasrohr von 6 cm Durchmesser, das

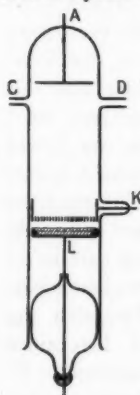


Fig. 1.

unten durch ein abnehmbares Schliffstück verschlossen werden konnte. Im oberen Teile befand sich eine 2—3 mm dicke Aluminiumelektrode A, die als Anode diente. Etwa 14 cm tiefer saß die siebartig durchlöchernte Kathode K, die ebenfalls aus Aluminium war und durch zwei Glasstifte und einen Aluminiumstift, der zur Zuleitung des Stromes diente, in seitlichen Ansätzen der Röhrenwand gehalten wurde. Am unteren Ende des Schliffstücks war mit Siegelack ein Eisenstift L eingekittet, der am oberen Ende einen Eisenteller trug, auf den die zu untersuchende Substanz, hier Lithiumchlorid, aufgeschmolzen wurde. Der Abstand zwischen K und L betrug 1,5—3 mm und konnte nach

1) J. Koch, Ann. d. Phys. 48. p. 98. 1915.

2) J. Stark, Die Naturwiss. 1915; Ann. d. Phys. 48. p. 210. 1915.

3) J. Stark, Ann. d. Phys. 43. p. 992 u. 1021. 1914.

Bedarf beliebig verändert werden. Die Lithiumelektrode war in der von Stark angegebenen Weise präpariert. Auf der oberen Seite war in die Eisenscheibe eine nach dem Rande zu abgestufte Vertiefung eingeschnitten. Auf der randlichen Stufe lag ein siebartig durchlöcheretes Platinblech. In diesen Teller wurde nun mittels eines Gebläses so viel festes Lithiumchlorid hineingeschmolzen, bis es das Platinblech um etwa 0,5 mm überragte. Das Platinblech hatte den Zweck, der Salzschrift festen Zusammenhang zu geben und ihren elektrischen Widerstand zu vermindern. Gleich nach dem Erstarren wurde dann die Salzschrift mit einer Feile eben gemacht, das Schliffstück eingefettet und in die Röhre eingesetzt.

In der Röhre wurde zwischen der Anode *A* und der Kathode *K* ein Glimmstrom in Sauerstoffgas hergestellt. Als Stromquelle diente dabei ein Induktorium mit Rotaxunterbrecher. Um den Sauerstoff rein zu erhalten, wurde er in langsamem Strome dauernd hindurchgeführt. Erzeugt wurde er durch Erhitzen von Kaliumpermanganat in einem 35 cm langen und 3 cm weiten Glasrohr, um das als Heizung eine vom elektrischen Strome durchflossene Spirale aus Eisendraht gewickelt war. Das so entwickelte Gas wurde durch Phosphorpentoxyd getrocknet und trat bei *C* in die Kanalstrahlenröhre ein. An *D* war eine Gaede-Quecksilberluftpumpe angeschlossen, die den Sauerstoff dauernd abpumpte. Durch Einstellen des Heizstromes gelang es, die Gaszufuhr so zu regeln, daß der Gasdruck in der Röhre konstant blieb, und zwar wurde der Druck so groß gewählt, daß der Kathodendunkelraum 8 bis 10 cm lang war.

Die durch den Glimmstrom im Raume *AK* erzeugten positiven Atomionen des Sauerstoffs werden durch den Kathodenfall nach *K* hin beschleunigt und treten durch die Löcher der Kathode hindurch als Kanalstrahlen in den Raum zwischen *K* und *L* ein. Indem sie hier auf die Lithiumchloridschicht aufprallen, werfen sie vermöge ihrer kinetischen Energie Lithiumatome aus ihrem Molekülverbände und der Salzschrift heraus und regen sie teilweise schon gleichzeitig zum Leuchten an. Andere Lithiumatome werden nachträglich durch den Stoß neu ankommender Kanalstrahlen zur Lichtemission an-

geregt. Über der Salzsäure bildet sich so eine 2 bis 3 mm dicke Schicht leuchtender Lithiumatome.

Um diese Lichtquelle im elektrischen Felde zu untersuchen, wurde an die beiden Elektroden *K* und *L* eine Gleichspannungsquelle gelegt. Infolge des geringen Abstandes der Elektroden voneinander und, weil sie fast dicht an die Glaswand herangingen, konnte sich zwischen ihnen kein Glimmstrom entwickeln. Es entstand also nur eine unselbständige Strömung, deren Stärke zwischen 1 und 10 Milliampere lag. Um die Entstehung eines Lichtbogens im Spannungsfelde zu vermeiden, wurde in den Stromkreis ein großer Widerstand eingeschaltet. Aus den von Stark<sup>1)</sup> angeführten Gründen wurde das Prinzip der Gegenschaltung gewählt, d. h. es wurde die Stromrichtung im Spannungsfelde der Richtung der Kanalstrahlen entgegengesetzt. Die Hilfselektrode *L* wurde also zur positiven, die Kathode *K* zur negativen Elektrode gemacht. Um eine Einwirkung beider Stromkreise aufeinander zu vermeiden, wurde die gemeinsame Elektrode *K* geerdet. Als Quellen für die Feldspannung wurden benutzt: eine Dynamomaschine mit einer elektromotorischen Kraft von 5000 Volt, ferner zwei Hochspannungsbatterien, die eine von 6000, die andere von 3200 Volt, so daß sich eine Feldspannung bis 14200 Volt herstellen ließ. Hierbei waren die Quellen in folgender Weise hintereinander geschaltet: Geerdete Elektrode *K*, Dynamomaschine, großer Alkoholwiderstand, die beiden Batterien, positive Elektrode *L*. Die Feldspannung wurde an einem parallel geschalteten Elektrometer dauernd kontrolliert.

### § 3. Optische Methode.

Die in dem Spannungsfeld erzeugte Lichtemission wurde gleichzeitig von einem Prismen- und einem Plangitterspektrographen aufgenommen, die mit den Spaltrohren einander zugewendet und senkrecht zur Röhrenachse aufgestellt waren. Es wurde so die Lichtemission senkrecht zur Achse des Spannungsfeldes, d. h. entsprechend seiner größeren Bedeutung, nur der Quereffekt von den photographischen Platten festgehalten.

1) J. Stark, Elektr. Spektralanalyse chem. Atome, p. 17.

Der verwendete Prismenspektrograph besaß ein lichtstarkes Verbundprisma, das so eingestellt war, daß der Spektrograph im Gebiet  $\lambda$  4300— $\lambda$  3890 seine größte Lichtstärke und Schärfe hatte. Seine Dispersion betrug für  $\lambda$  4100 ungefähr 1:16 mm:Å. Als Kameraobjektiv besaß er ein Zeiß-Tessar mit dem Öffnungsverhältnis von 1:3,5 und 30 cm Brennweite. Das Spaltrohrobjektiv war ein Achromat von ebenfalls 30 cm Brennweite und einem Öffnungsverhältnis von 1:6,5.

Der Plangitterspektrograph hatte ein Spaltrohrobjektiv von 1:6,3 Öffnung und 59 cm Brennweite und ein Kameraobjektiv von 1:4,5 Öffnung und 50 cm Brennweite, beides Zeiß-Tessare. Sein Gitter besaß 15000 Striche auf dem Zoll und eine geteilte Fläche von  $6,8 \times 9,9$  cm<sup>2</sup>. Es war gegen das Kollimatorobjektiv so geneigt, daß die Dispersion des Spektrographen für  $H_\beta$  1:15,3 mm:Å. und für  $H_\gamma$  1:17 mm:Å. betrug.

Um die Objektive beider Apparate mit dem Lichte des Spannungsfeldes möglichst zu füllen, wurde das Emissionsfeld durch Zeiß-Tessare von 5 cm Brennweite und 1:3,5 Öffnung auf die Spalte der Spektrographen abgebildet.

Zwischen die Kanalstrahlenröhre und das Zeiß-Tessar wurde dann noch für jeden Spektrographen ein Wollastonprisma eingeschoben. Die Wollastonplatte zerlegt vermöge ihrer Doppelbrechung das durch sie hindurchgehende Licht in zwei senkrecht zueinander schwingende Komponenten und trennt beide voneinander. Man erhält also auf der photographischen Platte von jeder Linie zwei Bilder; das eine gibt die Lichtschwingungen wieder, die parallel zur Achse des lichtemittierenden Spannungsfeldes erfolgen, d. h. die  $p$ -Komponenten, während das andere die senkrecht zur Achse schwingenden  $s$ -Komponenten wiedergibt. Auf diese Weise erhält man sofort Auskunft über die Polarisationsverhältnisse des untersuchten Lichtes, indem beide Bilder einer unpolarisierten Linie gleiche Schwärzung zeigen, während bei einer bezüglich der Achse des elektrischen Feldes polarisierten Linie das eine oder andere Bild derselben tiefere Schwärzung besitzt, je nachdem die  $p$ - oder  $s$ -Komponente überwiegt.

#### § 4. Verhältnis der Intensitäten der Hauptserie und der ersten und zweiten Nebenserie.

Für den Vergleich der Intensitäten der Li-Serien kamen nur solche Linien in Betracht, welche im Bereich der verwendeten Spektrographen lagen und außerdem durch das elektrische Feld nicht zerlegt wurden, also von der Hauptserie die Linie  $\lambda$  6708, von der ersten Nebenserie  $\lambda$  6104, von der zweiten Nebenserie  $\lambda$  4972. Es handelte sich hierbei darum, zu untersuchen, ob das Intensitätsverhältnis dieser Linien sich mit der elektrischen Feldstärke ändert. Dies geschah in folgender Weise. Auf dieselbe photographische Platte wurden unmittelbar hintereinander Aufnahmen für die Feldstärke Null und für andere Werte derselben bei gleicher Belichtungsdauer gemacht. Diese wurde so bemessen, daß die Schwärzungen von je zwei verglichenen Linien normal waren. Ergab sich dann für verschiedene Werte der Feldstärke dieselbe Schwärzungsdifferenz, so durfte nach der von Stark aufgestellten Formel:

$$\frac{J_1}{J_2} = e^{\frac{S_1 - S_2}{m}}$$

geschlossen werden, daß auch das Intensitätsverhältnis der Linien unabhängig von der Feldstärke dasselbe blieb.

In dieser Weise wurde  $\lambda$  6104 einerseits mit  $\lambda$  6708, andererseits mit  $\lambda$  4972 verglichen. Hierbei wurde eine rot-empfindliche Platte, nämlich die Spektralplatte von Wratten und Wrainright, verwendet. Beim Photometrieren ergaben sich Schwierigkeiten; einmal füllten nämlich die Linien ihrer Kürze wegen nicht die ganze Länge des Vergleichsfeldes im Photometerwürfel aus, sodann waren sie auch nicht in ihrer ganzen Länge gleich tief geschwärzt. Es wurde ja der leuchtende Raum zwischen Kathode und Hilfselektrode scharf auf dem Spektrographenspalt abgebildet, und da die Intensität der Li-Emission von der Salzfläche (Hilfselektrode) weg nach der Kathode abnimmt, so gilt das gleiche für die Schwärzung ihrer Linien im Spektrographen. Aus diesen Gründen besitzen die in Tab. I und II mitgeteilten Schwärzungen keine große Genauigkeit, es mögen in ihnen Fehler bis zu 30 Proz. vorkommen;  $S_p$  bedeutet in ihnen die Schwärzung des parallel zum Feld schwingenden Bildes einer Linie,  $S_s$  diejenige des senkrecht dazu schwingenden Bildes.

Tabelle I.

Feldstärke Volt $\times$ cm <sup>-1</sup>	$\lambda$ 6708		$\lambda$ 6104		$S_p$ 6708 - $S_p$ 6104	$S_s$ 6708 - $S_s$ 6104
	$S_p$	$S_s$	$S_p$	$S_s$		
0	2,40	2,27	1,58	1,33	0,82	0,94
40000	2,32	2,25	1,37	1,34	0,95	0,91
80000	2,34	2,06	1,38	1,15	0,96	0,91

Tabelle II.

Feldstärke Volt $\times$ cm <sup>-1</sup>	$\lambda$ 6104		$\lambda$ 4972		$S_p$ 6104 - $S_p$ 4972	$S_s$ 6104 - $S_s$ 4972
	$S_p$	$S_s$	$S_p$	$S_s$		
0	2,14	1,94	1,13	1,05	1,01	0,84
24000	2,19	2,03	1,15	1,10	1,04	0,98
80000	1,91	1,62	1,00	—	0,91	—

Gemäß den vorstehenden Tabellen sind die Schwärzungs-  
differenzen der verglichenen Linien innerhalb der Genauigkeit  
meiner Messungen unabhängig von der elektrischen Feldstärke.  
Mag darum eine größere Genauigkeit, als sie mir möglich war,  
auch eine geringe Veränderung des Verhältnisses der Intensi-  
täten von  $\lambda$  6708,  $\lambda$  6104 und  $\lambda$  4972 mit der Feldstärke er-  
geben, so ist doch sicher, daß dieses Verhältnis so gut wie  
unabhängig von der Feldstärke ist. Während also, wie Stark  
fand, die Intensität der Linien der dritten Nebenserie im Ver-  
gleich zu derjenigen der zweiten Nebenserie auf mehr als das  
Zehnfache anwächst, wenn die Feldstärke von 10000 auf  
80000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup> steigt, ja in einem Feld von der Stärke  
Null überhaupt nicht merklich ist, ändert sich das Verhältnis  
der Intensitäten von Linien der Hauptserie, der ersten und  
zweiten Nebenserie mit der Feldstärke nicht merklich.

§ 5. Fehlen der Polarisierung bei der Hauptserie, der ersten  
und zweiten Nebenserie.

Auch bei der Suche nach einer Polarisierung durch das  
elektrische Feld kamen nur solche Linien in Betracht, welche  
nicht in mehrere  $p$ - und  $s$ -Komponenten zerlegt werden, so  
von der ersten Nebenserie allein  $\lambda$  6104. Von der Hauptserie  
war für den von mir verwendeten Spektrographen nur die

Linie  $\lambda$  6708 zugänglich, sie wird ebenfalls nicht zerlegt. Von der zweiten Nebenserie konnten die Linien  $\lambda$  4972 und  $\lambda$  4273 untersucht werden, die ja auch nicht merklich zerlegt werden.

Ist kein elektrisches Feld auf das Raumgebiet einer Lichtemission gelegt, so ist diese natürlich unpolarisiert. Gleichwohl erscheint bei der von mir benutzten optischen Anordnung für die Feldstärke Null das  $s$ -Bild einer Linie im allgemeinen nicht ebenso intensiv wie das  $p$ -Bild, weil durch die Geometrie der Optik aus verschiedenen Ursachen die zwei Bilder auf der photographischen Platte verschieden intensiv werden können. Die Schwärzung  $S_p$  ist darum auch für die Feldstärke Null von  $S_s$  verschieden. So ändert sich die Differenz  $S_p - S_s$  mit der Stellung der Kanalstrahlenröhre. Man darf darum nur solche Differenzen  $S_p - S_s$  miteinander vergleichen, die an derselben Röhre bei unveränderter Stellung gewonnen wurden. Haben diese Differenzen, normale Schwärzungen vorausgesetzt, denselben Wert für verschiedene Feldstärken, so ist zu schließen, daß das Verhältnis der  $p$ - und der  $s$ -Intensität unabhängig von der Feldstärke den Wert Eins hat, daß also die Linie von dem elektrischen Feld nicht polarisiert wird. Gemäß den zwei nachstehenden Tab. III und IV trifft dies in der Tat für die Linien  $\lambda$  6708,  $\lambda$  6104 und  $\lambda$  4972 zu.

Tabelle III.

Feldstärke Volt $\times$ cm <sup>-1</sup>	$\lambda$ 6708			$\lambda$ 6104		
	$S_p$	$S_s$	$S_p - S_s$	$S_p$	$S_s$	$S_p - S_s$
0	2,40	2,27	0,13	1,58	1,33	0,25
40000	2,32	2,25	0,07	1,37	1,34	0,03
80000	2,34	2,06	0,28	1,38	1,15	0,23

Tabelle IV.

Feldstärke Volt $\times$ cm <sup>-1</sup>	$\lambda$ 6104			$\lambda$ 4972		
	$S_p$	$S_s$	$S_p - S_s$	$S_p$	$S_s$	$S_p - S_s$
0	2,14	1,94	0,20	1,13	1,05	0,08
24000	2,19	2,08	0,11	1,15	1,10	0,05
80000	1,91	1,62	0,29	1,00	0,96	0,04



Infolge der oben begründeten Ungenauigkeit der Messungen zeigen die Differenzen  $S_p - S_s$  zwar Schwankungen, diese sind aber nicht groß und zeigen keinen Gang mit der Feldstärke.

Aus einem gewissen Grunde, über den Hr. Prof. Stark demnächst eine ausführliche Mitteilung veröffentlichen wird, erscheinen die violetten Linien gleichmäßiger geschwärzt als die roten Linien. Sie lassen darum eine genauere Photometrierung zu als diese, und so konnte ich die Linie  $\lambda$  4273 (zweite Nebenserie) auf eine etwaige geringe Polarisierung untersuchen. Bei ihr scheint nun das elektrische Feld in der Tat eine merkliche Polarisierung zu bewirken. Die Differenz  $S_p - S_s$  besitzt nämlich bei ihr für eine große Feldstärke einen etwas größeren Wert als für die Feldstärke Null. Der Unterschied in den zwei Fällen ist, wenn auch sicher, freilich nur klein; er beträgt nur einige Einheiten der zweiten Dezimale und tritt darum besser in den Werten der Millimeterstellung des von mir benutzten Photometerkeiles hervor; so hat auf einer Platte  $S_p - S_s$  für die Feldstärke Null den Wert 2,6 mm, für 44000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup> den Wert 5,7 mm; auf einer anderen Platte für die Feldstärke Null den Wert 4,3 mm, für 30000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup> den Wert 5,2 mm.

Diese geringe Polarisierung einer Linie der zweiten Nebenserie ist sehr wahrscheinlich nur eine mittelbare Wirkung des elektrischen Feldes und identisch mit der Erscheinung der Polarisierung durch Bewegung, welche Stark<sup>1)</sup> entdeckt und später zusammen mit Lunelund<sup>2)</sup> genauer untersucht hat. Das elektrische Feld beschleunigt ja die in ihm auftretenden positiven Li-Atomionen, macht sie so zu Kanalstrahlen, die auf die Kathode zu laufen. Die Li-Kanalstrahlen werden bewegte Intensität emittieren, und diese wird ähnlich wie diejenige der H-Kanalstrahlen etwas polarisiert sein.

#### § 6. Feinzerlegung der ersten Nebenserie.

Stark und Kirschbaum haben bereits die Grobzerlegung von Linien der ersten oder diffusen Li-Nebenserie für eine mäßige Feldstärke und Dispersion beschrieben. Sie finden für

1) J. Stark, Verh. d. D. Phys. Ges. 8. p. 104. 1908.

2) J. Stark u. H. Lunelund, Ann. d. Phys. 46. p. 68. 1914.

$\lambda$  4603 zwei  $p$ - und zwei  $s$ -Komponenten (abgesehen von einer zweifelhaften, sehr schwachen Komponente), für  $\lambda$  4133 drei  $p$ - und drei  $s$ -Komponenten. Nachdem die Feinzerlegung von

H- und He-Linien gegenüber der Grobzerlegung eine erheblich größere Anzahl von elektrischen Komponenten geliefert hatte, durfte man dasselbe für die entsprechenden Li-Linien, also für Linien der ersten Nebenserie erwarten.

Diese Erwartung hat sich bei den Linien  $\lambda$  4603 und  $\lambda$  4133, die allein in dieser Hinsicht untersucht werden konnten, bestätigt. Und zwar wurde die Feinzerlegung von  $\lambda$  4603 mit dem Gitter-, diejenige von  $\lambda$  4133 mit dem Prismenspektrographen ermittelt. In der Tab. V sind die erhaltenen Zerlegungen für eine Feldstärke von  $80\,000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  mitgeteilt. In Fig. 2 sind sie zeichnerisch dargestellt, die Höhen der Komponenten darin geben angenähert ihr Intensitätsverhältnis wieder.

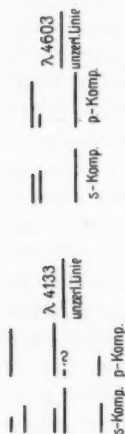


Fig. 2.

Tabelle V.

Feldstärke  $80\,000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$ .

Wellenlänge	$p$ -Komponenten		$s$ -Komponenten	
	Abstand von unzerl. Linie	Intensität, Bemerkung	Abstand von unzerl. Linie	Intensität, Bemerkung
4603,1	+ 3,7	4,3	+ 4,3	4,3
	- 5,6	1	- 5,6	2,8
	- 7,6	3,6	- 7,6	2,3
4132,9	+ 8,8	1	+ 9,6	1,8
	0	sehr klein, zweifelhaft	0	2,3
	- 2,5	2,8	- 2,5	1,3
	- 13,8	2,5	- 10,2	1,5
			- 13,8	1

Wie man sieht, werden jedenfalls die intensiven, äußeren  $p$ -Komponenten der zwei Linien unter den angegebenen Bedingungen nicht merklich zerlegt. Dadurch wird ein Vergleich der zwei Linien hinsichtlich der Größe ihrer Zerlegungen, also eine Antwort auf die Frage möglich, ob die Abstände

zweier unzerlegt bleibender Komponenten für zwei Glieder der ersten Nebenserie dieselbe Funktion der Feldstärke sind oder nicht. Demgemäß ist in Fig. 3 für verschiedene Feldstärken zu einem jeden Abstand der äußeren  $p$ -Komponenten der Linie  $\lambda$  4603 als Abszisse der Abstand der äußeren  $p$ -Komponenten der Linie  $\lambda$  4133 bei derselben Feldstärke als Ordinate eingetragen. Wie man sieht, ergibt sich eine Gerade durch den Anfangspunkt. Hieraus ist zu schließen, daß der Abstand der betrachteten Komponenten für die Linie  $\lambda$  4603 bis auf einen konstanten Verhältnissfaktor dieselbe Funktion der elektrischen Feldstärke ist wie für die Linie  $\lambda$  4133.

Die Beantwortung der Frage nach dieser Funktion selbst bot einige Schwierigkeiten. Ist allein die Berechnung der Feldstärken ( $\mathcal{E} = V/a$ ) aus Spannungsdifferenz  $V$  zwischen Kathode und Hilfselektrode und deren Abstand  $a$  nach den Darlegungen Starks (Elektrische Spektralanalyse, p. 38) bedenklich, so hätte sich in dem vorliegenden Falle der nicht streng ebenen Salzschicht, die als Hilfselektrode

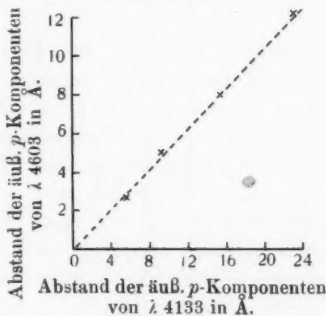


Fig. 3.

diente, der Abstand  $a$  ohnedies nicht unmittelbar genau bestimmen lassen. Aus diesem Grunde wurde in folgender Weise zu jenem Zwecke verfahren.

Auf der ersten Aufnahme, die nach Erneuerung der Salzschicht erhalten wurde, erschienen jedesmal die Wasserstofflinien  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  infolge der anfänglichen Anwesenheit von Wasserdampf und Kohlenwasserstoffen in der Kanalstrahlentröhre. Die elektrischen Zerlegungen der Linien  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  konnten dann benutzt werden, um aus ihnen nach den Angaben Starks (Elektrische Spektralanalyse, p. 52) die Feldstärke  $\mathcal{E}_1$  zu berechnen, welche die Zerlegungen der H- und Li-Linien hervorbrachte. Wurden nun mit derselben Röhre ohne Änderung des Abstandes  $a$  weitere Aufnahmen für die Spannungsdifferenzen  $V_2, V_3$  usw. gemacht, so durfte man an-

nehmen, daß wenigstens angenähert die Feldstärken  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  in demselben Verhältnis wie die Spannungsdifferenzen  $V_1, V_2, V_3$  standen, und es wurde so  $\mathcal{E}_2$  bzw.  $\mathcal{E}_3$  aus  $\mathcal{E}_1$  und  $V_2/V_1$  bzw.  $V_3/V_1$  berechnet. In dieser Weise wurden die in Fig. 4 eingetragenen beobachteten drei ersten Punkte erhalten, der vierte Punkt wurde unabhängig von ihnen aus der Zerlegung von  $H_\beta$  für einen anderen Elektrodenabstand ermittelt.

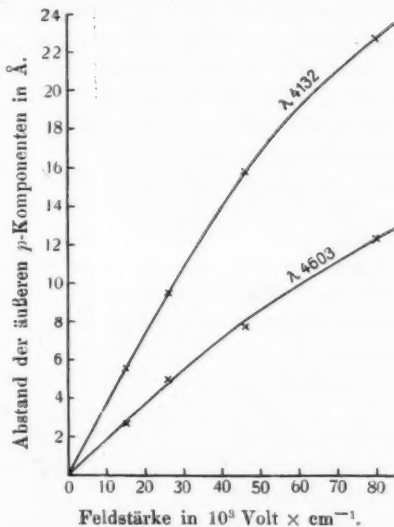


Fig. 4.

Gemäß der Fig. 4 nimmt die Zerlegung der Linien  $\lambda 4603$  und  $\lambda 4133$  von der ersten Nebenserie anfänglich proportional der elektrischen Feldstärke, später etwas langsamer zu. Eine ähnliche Beziehung zwischen Zerlegung und Feldstärke haben Stark und Kirschbaum für die He-Linie  $\lambda 4472$  gefunden, welche innerhalb der ersten Nebenserie der Li-Linie  $\lambda 4603$  entspricht.

§ 7. Einfluß der Feldstärke auf das Intensitätsverhältnis der Komponenten in der ersten Nebenserie.

Stark und Kirschbaum haben an den He-Linien  $\lambda 4472$  und  $\lambda 4026$  die merkwürdige Erscheinung beobachtet, daß das

Intensitätsverhältnis ihrer elektrischen Komponenten mit der Feldstärke sich ändert, indem die kurzwellige Komponente einer jeden Linie im Verhältnis zur langwelligen mit wachsender Feldstärke intensiver wird. Die Untersuchung dieser Erscheinung im Falle der Li-Linien lag zwar nicht im Plane dieser Arbeit; indes ergaben sich in dieser Hinsicht ungesucht gelegentliche Beobachtungen und, da jene Erscheinung einmal theoretische Bedeutung gewinnen mag, so seien sie hier mitgeteilt.

Bei der Li-Linie  $\lambda$  4133 ist für eine Feldstärke von  $15000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  die äußere  $+p$ -Komponente erheblich intensiver als die äußere  $-p$ -Komponente; für  $80000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  ist dagegen umgekehrt die  $-p$ -Komponente 2,5 mal intensiver als die  $+p$ -Komponente.

Die gleiche Erscheinung lehrt für die Li-Linie  $\lambda$  4603 die Tab. VI. In ihr ist die Schwärzung der äußeren  $p$ -Komponenten, sowie der langwelligen  $s$ - und der inneren kurzwelligen  $s$ -Komponente in Millimeterstellung des Vergleichsschwärzungskeiles im Mikrophotometer angegeben. Wie aus ihr zu ersehen ist, nimmt mit wachsender Feldstärke die Differenz der Schwärzungen der lang- und der kurzwelligen Komponente ab, das Verhältnis der Intensität der kurz- zu derjenigen der langwelligen Komponente also zu wie bei  $\lambda$  4133. Noch rascher als die innere kurzwellige  $s$ -Komponente nimmt die äußere kurzwellige  $s$ -Komponente an Intensität zu, während sie bei mittleren Feldstärken noch nicht angedeutet ist, erscheint sie bei  $80000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  fast ebenso intensiv wie die innere  $s$ -Komponente.

Tabelle VI.

Volt $\times \text{cm}^{-1}$	Schwärzung in mm-Keilstellung der $p$ - u. $s$ -Komponenten					
	$+p$	$-p$	Differenz	$+s$	$-s$	Differenz
15000	78,6	70	8,6	74,3	60,6	13,9
26000	69	63	6	62,8	54,2	8,5
46000	68,5	64,5	4	60	54	6
80000	68	65	3			

§ 8. Verschiebung der zweiten Nebenserie.

Über die Linien  $\lambda$  4972 und  $\lambda$  4273 der zweiten oder scharfen Nebenserie teilen Stark und Kirschbaum mit, daß sie in einem Feld von der Stärke  $38000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  etwas

nach Rot verschoben erscheinen. Doch ergab sich selbst bei  $\lambda$  4273 die Verschiebung so klein, daß ihre genaue Messung nicht möglich war. Auch in der vorliegenden Untersuchung konnten wegen der geringen Dispersion der verwendeten Apparate keine Messungen an  $\lambda$  4972 ausgeführt werden, dagegen konnte die Verschiebung von  $\lambda$  4273 für eine große Feldstärke einigermaßen genau ermittelt werden, und an  $\lambda$  3985, dem nächsten Serienglied, ließ die Lichtstärke des verwendeten Prismenspektrographen eine Reihe von Messungen für verschiedene Feldstärken zu.

Der Effekt des elektrischen Feldes auf die Wellenlängen der Linien der zweiten Nebenserie ist hier von vornherein „Verschiebung“ genannt worden. Es konnte nämlich bei keiner der untersuchten Linien eine Zerlegung in mehrere *p*- und mehrere *s*-Komponenten festgestellt werden; zudem erwies sich innerhalb der Genauigkeit der Messungen die Wellenlänge der einzigen *p*-Komponente als identisch mit derjenigen der einzigen *s*-Komponente.

Zum Zweck der Ermittlung der Verschiebung wurde nicht der Abstand der im elektrischen Feld gewonnenen Linie  $\lambda$  3985 von ihrer spektralen Lage im Lichtbogen gemessen, indem etwa das Lichtbogenspektrum oberhalb und unterhalb des Spektrums aus dem elektrischen Feld entworfen worden wäre; denn hierbei entstehen, wie Stark<sup>1)</sup> darlegte, durch ungleiche Füllungen der Öffnungen des Spektrographen in den zwei Fällen leicht Fehler. Es wurde vielmehr der Abstand der Linie  $\lambda$  3985 von der Linie  $\lambda$  4133 oder von deren mittlerer *s*-Komponente gemessen, die ja dieselbe Wellenlänge wie die vom Feld unbeeinflusste Linie hat. Die so erhaltenen Abstände wurden zunächst mit der Zerlegung der Linie  $\lambda$  4133, genauer mit dem Abstand ihrer äußeren *p*-Komponenten, in Fig. 5 verglichen, indem dieser als Abszisse, jener als Ordinate angetragen wurde. Die so gewonnene Kurve weicht merklich von einer Geraden ab; die elektrische Änderung der Wellenlänge des dritten Gliedes der zweiten Nebenserie folgt also in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke einem anderen Gesetz als die Zerlegung des dritten Gliedes der ersten Nebenserie,

1) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse, p. 60.

und zwar nimmt die Rotverschiebung von  $\lambda$  3985 mit wachsender Feldstärke rascher zu als die  $p$ -Zerlegung von  $\lambda$  4133.

Um die Abhängigkeit der Rotverschiebung von der Feldstärke unmittelbar darzustellen, wurden für eine Reihe von Punkten der Kurve in Fig. 5 die Feldstärken für ihre zugehörigen Abszissen aus Fig. 4 entnommen und so die Kurve in Fig. 6 konstruiert. Wenn diese auch nur wenig von einer Geraden abweicht, so ist es doch sehr wahrscheinlich, daß diese Abweichung wirklich ist, daß also die Rotverschiebung einer Linie der zweiten Nebenserie rascher mit der elektrischen Feldstärke zunimmt, als deren erster Potenz entspricht. Eine derartige Abhängigkeit der Verschiebung von der Feldstärke

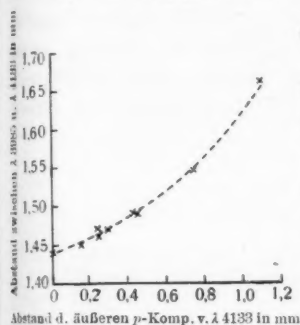


Fig. 5.

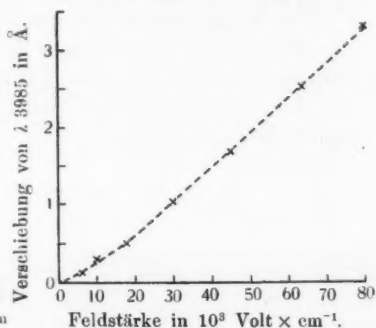


Fig. 6.

konnte Stark<sup>1)</sup> für eine Linie der dritten Nebenserie außer Zweifel stellen. Die Linien der zweiten Nebenserie sind demnach denjenigen der dritten Nebenserie nicht bloß darin ähnlich, daß sie wie diese durch das elektrische Feld nach Rot verschoben werden, sondern auch in der Art der Abhängigkeit dieser Verschiebung von der Feldstärke. Die Rotverschiebung der Linien der dritten Nebenserie ist übrigens erheblich größer als diejenige der zweiten Nebenserie. So wird das dritte Glied von jener um 7,8 Å., das dritte Glied von dieser um 3,3 Å. durch ein elektrisches Feld von  $80000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$  verschoben.

Die Rotverschiebung der Linien der zweiten Nebenserie durch das elektrische Feld folgt dem allgemeinen Seriengesetz;

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. p. 210. 1915.

es nimmt nämlich die Änderung der Wellenlänge durch das elektrische Feld mit steigender Gliednummer zu. So beträgt sie bei  $\lambda$  4273, dem zweiten Glied, 1,2 Å., bei  $\lambda$  3985, dem dritten Glied, 3,3 Å. für eine Feldstärke von 80000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup>.

An den Linien der zweiten Li-Nebenserie findet sich auch der Zusammenhang, den Stark zwischen dem von ihm entdeckten Effekt und der Verbreiterung durch Ionendichte festgestellt hat; entsprechend ihrer Rotverschiebung durch das elektrische Feld werden nämlich die Linien der zweiten Nebenserie bei großer Dampfdichte im Lichtbogen nach Rot verbreitert, und zwar in zunehmendem Maße mit steigender Gliednummer.

Die Arbeit wurde angefertigt im Physikalischen Institut der Königlichen Technischen Hochschule zu Aachen unter Leitung des Hrn. Professor Dr. J. Stark. Ihm schulde ich für die Anregung und vielfache Unterstützung der Arbeit großen Dank.

(Eingegangen 17. April 1916.)



Nr. 1.  $H\beta$ .



Äußere  
Komponente

Innere  
Komponente

Platte  $\phi$  (Hauff). Spalt 0,05 mm, Expositionsdauer  $17\frac{1}{2}$  Stunden, Feld 25000, Spannung 9700 Volt, Geschwindigkeit des Maximums  $v = 4,7 \cdot 10^3$ , Röhrendurchm. d. Kanalstrahlenröhre 30 mm, Strom in der Röhre 2,8 M.A., Vergrößerung 11 fach.

Nr. 2.  $H\gamma$ .

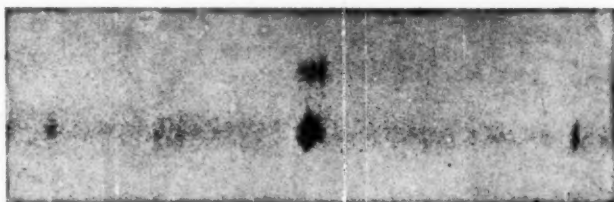


Äußere  
Komponente

Innere  
Komponente

Platte  $\phi$  (Hauff). Spalt 0,03 mm, Expositionsdauer 25 Std.,  $\phi = 25000$ , Spannung 9600 Volt, Geschw. d. Max.  $v = 4,7 \cdot 10^3$ , Röhrendurchm. d. Kanalstrahlenröhre 30 mm, Strom in der Röhre 2,0 M.A., Vergrößerung 11 fach.

Nr. 3.  $H\gamma$ .

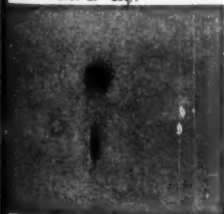


Äußere  
Komponente

Innere  
Komponente

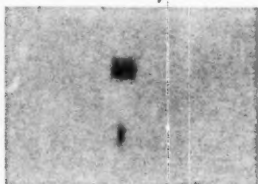
Platte  $\phi$  (Hauff). Spalt 0,05 mm, Expositionsdauer  $17\frac{1}{2}$  Stunden, Feld 25000, Spannung 9700 Volt, Geschwindigkeit des Maximums  $v = 4,7 \cdot 10^3$ , Röhrendurchm. d. Kanalstrahlenröhre 30 mm, Strom in der Röhre 2,8 M.A., Vergrößerung 11 fach.

Nr. 4.  $H\gamma$ .



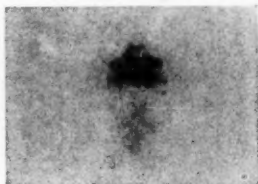
Äuß. Komp. Innere

Nr. 5.  $H\gamma$ .



Äuß. Komp. Innere

Nr. 6.  $H\beta$ .



Äuß. Komp. Innere

Platte  $\epsilon$  (Lumière). Spalt 0,04 mm, Expositionsdauer 26 Std.,  $\phi = 26000$ , Spannung 6400 Volt, Mittl. Geschw. d. Max.  $v = 4,0 \cdot 10^3$ , Röhrendurchm. 18 mm, Strom in der Röhre 2,8 M.A., Vergrößerung 12 fach.

Platte  $\gamma$  (Lumière). Expositionsdauer 24 Stunden,  $\phi = 26000$ , Spannung 5000 Volt, Geschwindigkeit des Maximums  $v = 4,0 \cdot 10^3$ , Vergrößerung 12 fach.

Platte  $\delta$  (Lumière). Spalt 0,1 mm, Expositionsdauer 60 Std.,  $\phi = 26000$ , Spannung 5000 Volt, Größte Geschwind.  $6,5 \cdot 10^3$ , Röhrendurchm. 18 mm, Strom in der Röhre 2,8 M.A., Vergrößerung 12 fach.

W. Wien.



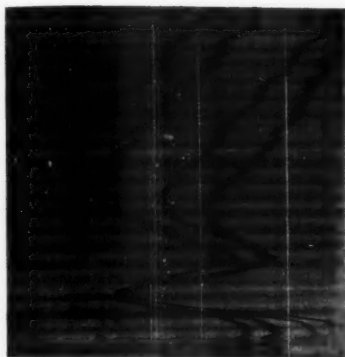


Fig. 1.

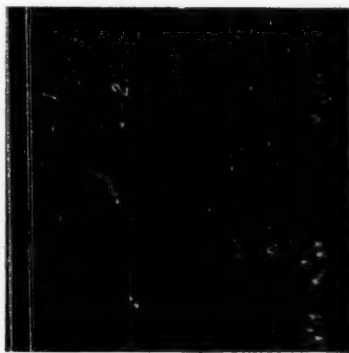


Fig. 2.



Fig. 3.

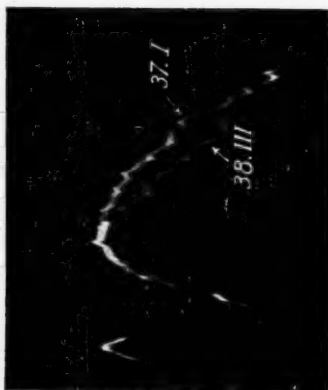
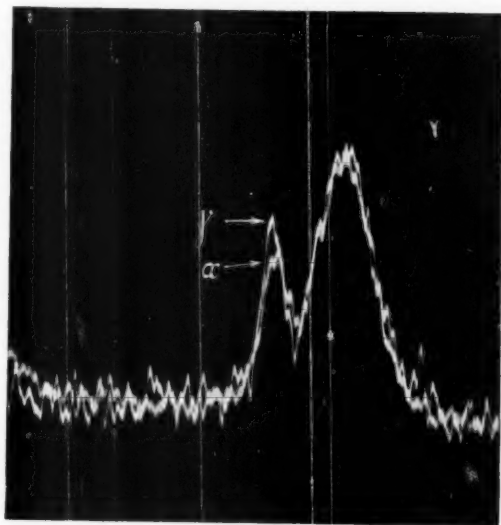
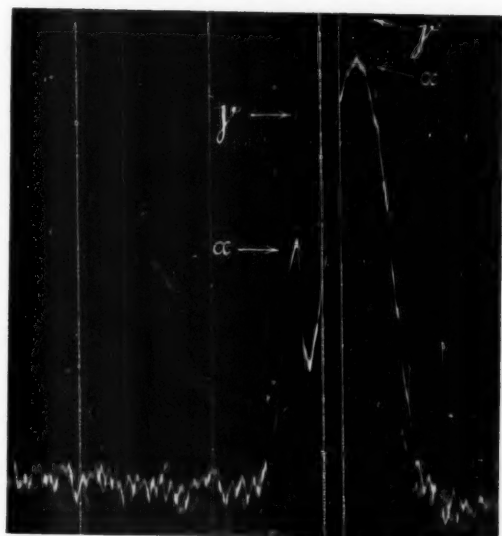


Fig. 6.





73. II.

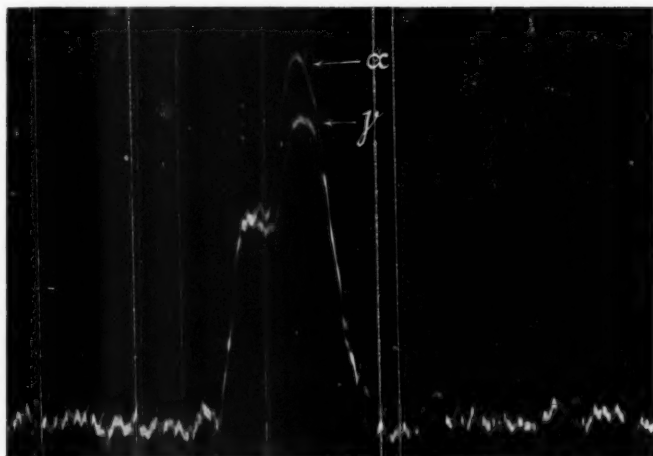


73. III.

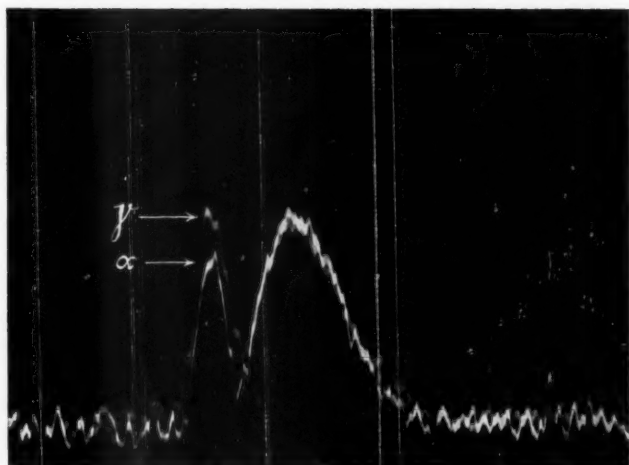
Fig. 4.

R. v. Hirsch.





67. IV.



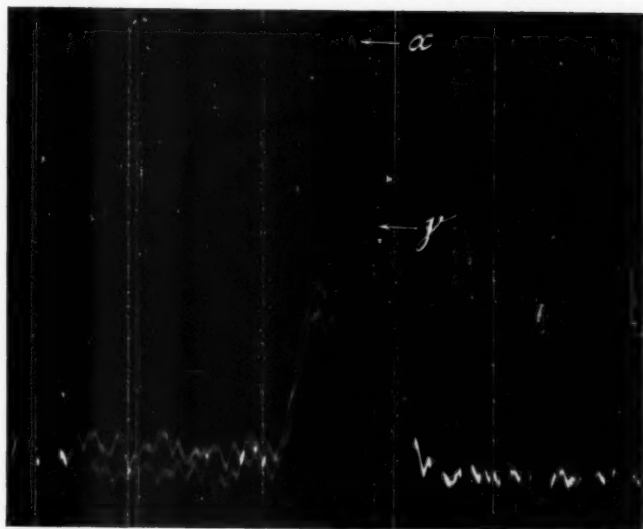
67. V.

Fig. 5.

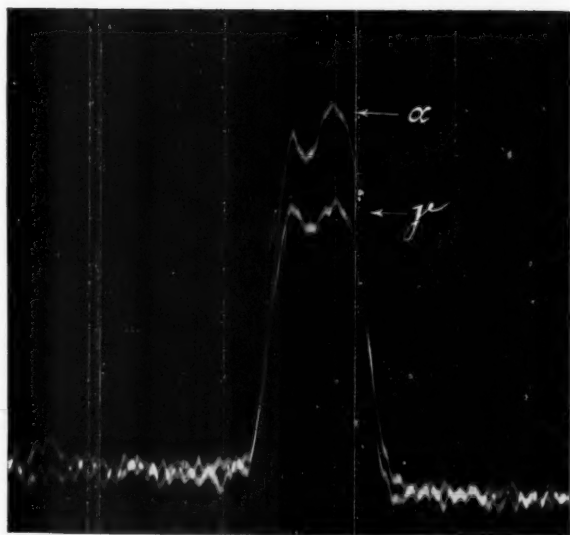
R. v. Hirsch.







82. VI.



82. VII.

Fig. 7.

R. v. Hirsch.